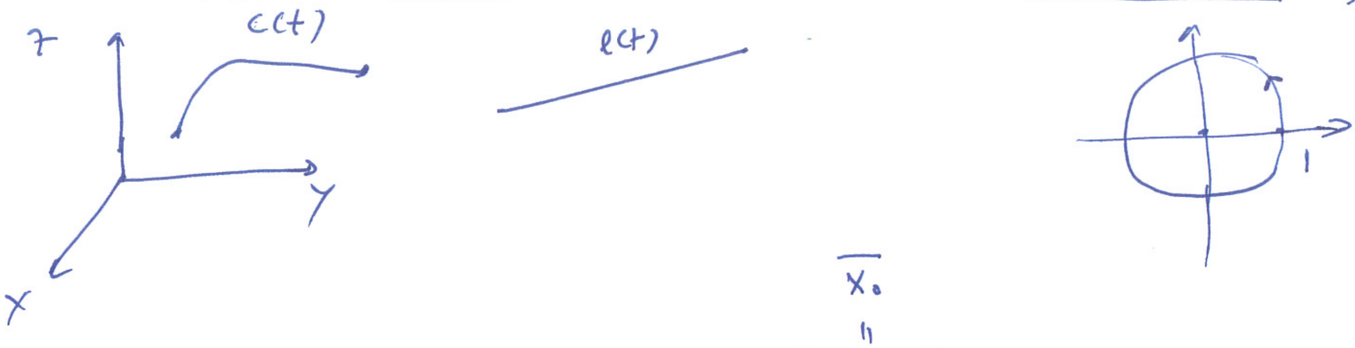
# Παραμετρική αναπαράσταση καμπυλών στον $\mathbb{R}^n$ (MT, σελ. 114) 1




**Π1** Ευθεία στον $\mathbb{R}^n$ που διέρχεται από $\overbrace{(x_1,\dots,x_n)}^{\bar{x}_0 \,=}$ και είναι $\parallel (v_1,\dots,v_n)=\bar{v}$

$$\ell(t) = \bar{x}_0 + t\bar{v} = (x_1,\dots,x_n) + t(v_1,\dots,v_n) = (x_1+tv_1,\dots,x_n+tv_n)$$
$$t\in\mathbb{R}$$

**Π2** Κύκλος στον $\mathbb{R}^2$ : $c(t) = (\overset{x(t)}{\cos t}, \overset{y(t)}{\sin t})$, $0\le t\le 2\pi$ $[c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2]$

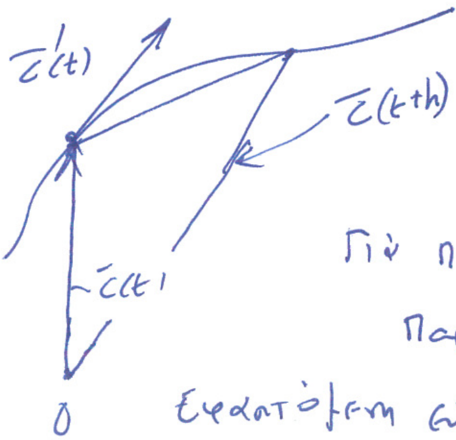
**Π3** Παραβολή στον $\mathbb{R}^2$ : $c(t) = (\overset{x(t)}{t}, \overset{y(t)}{t^2})$, $t\in\mathbb{R}$.

**Π4** Κυκλοειδής : MT, σελ. 116-117.

➔ Η απεικόνιση $c: [a,b]\to\mathbb{R}^n$ λέγεται <u>διαδρομή</u>, το σύνολο των σημείων $c(t)$ [απ. ή εικόνα] λέγεται <u>καμπύλη</u>.

<u>Ορ</u> (<u>Διάνυσμα ταχύτητας</u>) : Αν $c$ παραγωγίσιμη διαδρομή τότε η διανυσματική ταχύτητα : $\bar{c}'(t) = \lim_{h\to 0}\dfrac{\bar{c}(t+h)-\bar{c}(t)}{h}$

Αν $\bar{c}(t) = (x(t),y(t),z(t))$, $\bar{c}'(t) = (x'(t),y'(t),z'(t))$ και $\|\bar{c}'\|$ = μέτρο ταχύτητας




Το $\bar{c}'(t)$ είναι διάνυσμα που <u>εφάπτεται</u> στην $\bar{c}(t)$ (εφόσον $\bar{c}'(t)\neq 0$).

Για παραδείγματα βλ. MT σελ. 119-121

Παραδείγματα 5, 6, 7, SC p. ~190.

<u>Εφαπτόμενη ευθεία</u> : $\ell(t) = \bar{c}(t_0) + (t-t_0)\bar{c}'(t_0)$

βλ. Π8, Π9 (MT, σελ. 120-121).

# Παραδείγματα – Ασκήσεις ΜΤ σελ. 121

**Α1**: $x=\sin t,\ y=4\cos t,\ 0\le t\le 2\pi \rightsquigarrow 4x^2+y^2=4$ (έλλειψη)

**Α3**: (ευθεία) $c(t)=(2t-1,\ t+3,\ t)=(-1,3,0)+t(2,1,1)$

**Α7**: $\bar c(t)=6t\,\vec{i}+3t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$, $\quad \bar c'(t)=6\vec{i}+6t\,\vec{j}+3t^2\vec{k}$

**Α12**: $\bar c(t)=(3t^2,t^3)$, $\quad \bar c'(t)=(6t,3t^2)$

**Α19**

εξίσωση εφαπτ. ευθείας: $l(t)=\bar c(t_0)+(t-t_0)\,\bar c'(t_0)$

$\rightsquigarrow l(t)=(4,0,0)+(t-t_0)(4,8,0)$

Για $t=3$ και $t_0=2$: $\quad l(3)=(4,0,0)+(4,8,0)=(8,8,0)$.

## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

ΜΤ, σελ 123, Θ10, Π1.

**Θ (κανόνας αλυσίδας)**

$$\begin{tikzcd} U\subset\mathbb{R}^n \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & V\subset\mathbb{R}^m \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

$g$ παραγωγίσιμη στο $x_0$ και η $f$ στο $y_0=g(x_0)$. Τότε η $f\circ g$ παραγωγίσιμη στο $x_0$ και

$$D(f\circ g)(x_0)=Df(y_0)\cdot Dg(x_0).$$

**Π1**: $\bar c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ και $h(t)=f(\bar c(t))=f(x(t),y(t),z(t))$

Τότε:

$$\frac{dh}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

$$=\underset{(1\times 3)}{Df(\bar c(t))}\ \underset{(3\times 1)}{D\bar c(t)}=\nabla f(\bar c(t))\cdot \bar c'(t)$$

εσωτ. γινόμενο.

**Π2**: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\quad h(x,y,z)=f\circ g(x,y,z)=f(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

3

**Π3:** $\frac{\partial}{\partial x} g\left(\frac{x+y}{xy}\right) = ?$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = g\left(\frac{x+y}{xy}\right)$

$= g(u)$, $u = \frac{x+y}{xy}$

$$\frac{\partial}{\partial x} g(u(x,y)) = \frac{dg}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= g'\left(\frac{x+y}{xy}\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = g'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

**Π4:** $h(x,y) = f(x, u(x,y))$ $\quad \frac{\partial h}{\partial x} = ?$

**απ:** $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$

**Π5:** $h(x) = f(x, u(x))$ $\quad \frac{dh}{dx} = ?$

**απ:** $\frac{dh}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} u'(x).$

**Π6:** $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\bar{f} = (f_1, \dots f_m)$ και $g(\bar{x}) = \sin \|\bar{f}(\bar{x})\|^2$

$(= \sin u,\ u = \|\bar{f}\|^2)$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \cos u \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1^2 + \dots + f_m^2) =$$

$$= \cos(\|\bar{f}\|^2) \cdot \left(2 f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots 2 f_m \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\right)$$

και $\quad Dg(\bar{x}) = \left[\frac{\partial g}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g}{\partial x_m}\right]$

## Ασκήσεις από MT, σελ. 130–131

**A8** : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$h = f \circ g(x,y) = \left(e^{e^x - e^{-y}},\ \cos(e^x + \cos(y-x)) + \sin(e^x + \cos(y-x) + e^{-y})\right)$$

$= (h_1, h_2)$

$\left(\begin{array}{l} u = e^x \\ v = \cos(y-x) \\ w = e^{-y} \end{array}\right)$

$$D(f \circ g) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \dots$$

Με κανόνα αλυσίδας : $D(f \circ g) = \overbrace{Df}^{2\times 3} \cdot \overbrace{Dg}^{3\times 2} = \begin{bmatrix} e^{u-w} & 0 & -e^{u-w} \\ -\sin(u+v) + \cos(u+v+w) & -\sin(u+v) + \cos(u+v+w) & \cos(u+v+w) \end{bmatrix}$

$$\cdot \begin{bmatrix} e^{x} & 0 \\ \sin(y-x) & -\sin(y-x) \\ 0 & -e^{-y} \end{bmatrix}$$

. Στο σημείο $(x,y)=(3,0)$ έχω ότι: $(u,v,w)=(1,1,1)$ Συνεπώς έχω

$$Df\, Dg\,(3,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\sin 2 + \cos 3 & -\sin 2 + \cos 3 & \cos 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\sin 2 + \cos 3 & -\cos 3 \end{bmatrix}.$$

**A10**: Η θερμοκρασία του σωματιδίου την χρονική στιγμή $t$ είναι:

$$T(t) = T(\cos t, \sin t, t) = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

(α) $T'(t) = 2t$ (β) Θα χρησιμοποιήσω τον προσεγγιστικό τύπο:

$T(t) \simeq T(t_0) + T'(t_0)(t - t_0)$ με $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{2} + 0{,}01$. Άρα:

$$T\left(\tfrac{\pi}{2} + 0{,}01\right) \simeq 1 + \frac{\pi^2}{4} + 0{,}01 \cdot \pi .$$

**A16**: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-3/2} \cdot 2x = \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

και αντίστοιχα $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. Άρα $\nabla f = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}(x,y)$

Αν $\bar{x} = (x,y)$. Τότε $\nabla f = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|^3}$.

$\left( f(\bar{x}) = \frac{1}{\|\bar{x}\|} \right)$

**A5** $\frac{\partial}{\partial x}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x}$

$$\Rightarrow \left( \frac{\partial}{\partial x}(fg), \frac{\partial}{\partial y}(fg), \ldots \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} g + f \frac{\partial g}{\partial y}, \ldots \right)$$

$$= g\left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \right) + f\left( \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right) = g \nabla f + f \nabla g.$$