Παραδείγματα κανόνα αλυσίδας (συνέχεια)

Π1: $z = u(x,y)\, e^{x+y^2}$ Βρείτε $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} e^{x+y^2} + u \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x+y^2}\right) = u_x e^{x+y^2} + u e^{x+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = u_y e^{x+y^2} + 2y\, u\, e^{x+y^2}.$$

Π2: Άλλος συμβολισμός (μερικές φορές πολύ χρήσιμος):

Αν $f(x,y,z)$ συνάρτηση τότε $D_1 f$ = παράγωγος ως προς την 1η μεταβλητή $= \frac{\partial f}{\partial x}$.

Αντίστοιχα $D_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}$, $D_3 f = \frac{\partial f}{\partial z}$.

Έστω $w(x,y) = f(x,y,z(x,y))$. Βρείτε $\frac{\partial w}{\partial x} = ?$

Απ: $$\frac{\partial w}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{D_1 f} \cdot \overbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}^{=1} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{D_2 f} \cdot \overbrace{\cancel{\frac{\partial y}{\partial x}}}^{=0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}}_{D_3 f} \frac{\partial z}{\partial x} = D_1 f + D_3 f\, z_x$$

Βλ. MT, σελ. 132, A26 $\left[\frac{\partial w}{\partial x} \neq D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} \right]$

Π3: A29 (σελ. 132, MT): Έστω $F(x,z) := \int_0^z f(x,y)\,dy$, $F(x,x) = h(x)$

$\frac{dh}{dx} = ?$ Απ: $$\frac{dh}{dx}(x) = \frac{d}{dx} F(x,x) = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{D_1 F} \cdot 1 + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial z}}_{D_2 F}\Big|_{z=x} \cdot 1 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^z f(x,y)\,dy + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^z f(x,y)\,dy \Big|_{z=x} = \int_0^z \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy + f(x,x).$$

$\Rightarrow$ Βασική σχέση: $h(t) = f(\bar{c}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} z'(t) = D_1 f \cdot x'(t) + D_2 f\, y'(t) + D_3 f\, z'(t).$$

ΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

$f: U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$. MT σελ. 133

Έστω η ευθεία $\bar{\ell}(t) = \bar{x} + t\bar{v}$, και $t \longrightarrow f(\bar{x} + t\bar{v})$ η σύνθεση. Τότε: η κατά κατεύθυνση παράγωγος της f στο $\bar{x}$ κατά μήκος του $\bar{v}$:

$$\frac{d}{dt} f(\bar{x} + t\bar{v})\Big|_{t=0} \qquad (*)$$

Αν $\bar{v}$ μοναδιαίο τότε έχουμε την κατά κατεύθυνση παράγωγο της f κατά την κατεύθυνση του $\bar{v}$.

⁂ ⇒ Στο μάθημα θα θεωρώ πάντα ότι $\bar{V}$ είναι μοναδιαίο.

Χρησιμοποιώντας κανόνα αλυσίδας στο (*) βρίσκω: (ΜΤ, σελ. 135 Π3, Π4)

$$\frac{d}{dt} f(\bar{x} + t\bar{v})\Big|_{t=0} = \nabla f(x) \cdot \bar{V}$$

= ρυθμός μεταβολής της f κατά την κατεύθυνση $\bar{v}$. $\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{V}}$ ← συμβολισμός

π.χ. $V = (1, 0, 0)$: $\nabla f \cdot (1, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}$

$V = \bar{e}_j = (0, \dots, \overset{j}{1}, \dots, 0)$ $\quad \nabla f \cdot \bar{e}_j = \frac{\partial f}{\partial \bar{e}_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$

Θ| Αν $\nabla f \neq 0$, η κατεύθυνση του ∇f είναι η κατεύθυνση κατά την οποία η f αυξάνει ταχύτερα!

Θ| Έστω $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, και S επιφ. στάθμης $f(x,y,z) = k$. Τότε $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \perp S$ (όταν $(x_0, y_0, z_0) \in S$). [ΜΤ, σελ. 136]

Ορ| (Εφαπτόμενο επίπεδο σε επιφάνεια στάθμης) Έστω $S = \{(x,y,z) : f(x,y,z) = k\}$

αν $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ τότε το επίπεδο

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

εφάπτεται της S στο σημείο (x_0, y_0, z_0). [ΜΤ, σελ. 137-138]

Π1 Βρείτε την εξ. του εφαπτόμενου επιπέδου στο γράφημα της $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ στο σημείο $(x_0, y_0) = (2, -1)$.

α' τρόπος : $z = f(2,-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(y+1) = 8 + 4(x-2) - 8(y+1)$

$f_x = 2x$, $f_x(2,-1) = 4$ // $f_y = 8y$, $f_y(2,-1) = -8$

$\rightsquigarrow \quad z = 4x - 8y - 8.$

β' τρόπος $F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0 \Rightarrow \nabla F = (\underset{\frac{\partial F}{\partial x}}{-f_x}, \underset{\frac{\partial F}{\partial y}}{-f_y}, \underset{\frac{\partial F}{\partial z}}{1})$

Στό σημείο $(x_0, y_0, z_0) = (2, -1, f(2,-1)) = (2,-1,8)$ έχω δη

$\nabla F\big|_{(2,-1,8)} = (-4, 8, 1)$ και εξ. εφ. επιπέδου:

$\nabla F\big|_{(2,-1,8)} \cdot (x-2, y+1, z-8) = 0 \Leftrightarrow (-4, 8, 1)\cdot(x-2, y+1, z-8) = 0$

$\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow z = 4x - 8y - 8$

[* Ο β' τρόπος είναι πιό γενικός: μιά ισοσταθμική επιφάνεια δέν είναι απαραίτητα γράφημα συνάρτησης].

Ασκήσεις από ΜΤ σελ. 140–146

A9 $\bar r(t) = (t\cos(\pi t), t\sin(\pi t), t), \quad t_0 = 5.$

Εφαπτόμενη ευθεία: $\bar\ell(t) = \bar r(t_0) + (t-t_0)\bar r'(t_0) = (-5, 0, 5) + (t-5)(-1, -5\pi, 1)$

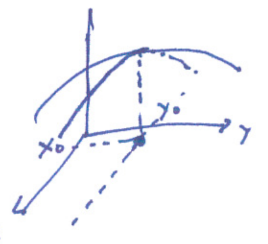
[$\bar r'(t) = (\cos(\pi t) - \pi t\sin\pi t, \sin(\pi t) + \pi t\cos\pi t, 1)$, $\bar r'(5) = (-1, -5\pi, 1)$]

Από εξ. εφαπτ. ευθείας: $\bar\ell(t) = (-t, -5\pi(t-5), t)$. Η $\bar\ell$ τέμνει τό επίπεδο xy όταν $z=0$ δηλ. $t=0$, οπότε $\bar\ell(0) = (0, 25\pi, 0)$.

A13 (σελ. 140) Η επιφάνεια αυτή είναι ισοσταθμική της συνάρτησης $F(x,y,z) = \cos(xy) - e^z + 2 = 0$ δηλ. $\bar n \parallel \nabla F = (-y\sin(xy), -x\sin(xy), -e^z)\big|_{(1,\pi,0)} = (0, 0, -1)$.

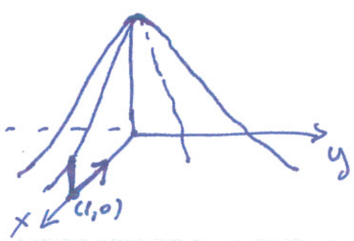
A30 $\nabla w = (2x+y, x)$, $\nabla w\big|_{(-1,1)} = (-1,-1)$ $\quad \|\nabla w\| = \sqrt{2}$.

A34



Η $f(x, y_0)$ έχει μέγιστο στό x_0: δηλ. $\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0$.

A39



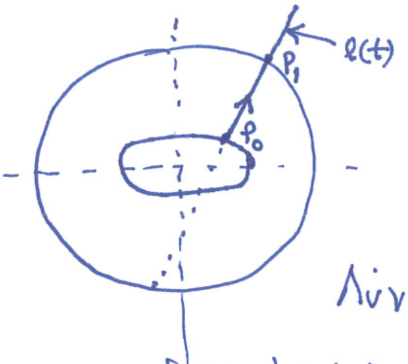
$\nabla h = (-4x e^{-x^2}, -6y e^{-y^2})$

$\nabla h(1,0) = (-4e^{-1}, 0)$

A43 Επιφάνεια: $F(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2-6=0$

κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια: $\nabla F = (2x, 4y, 6z)$

$\nabla F(1,1,1) = (2,4,6) = 2(1,2,3)$. Εξίσωση ευθείας $\ell(t) = (1,1,1)+t(1,2,3) =$



$= ((1+t), 1+2t, 1+3t)$.

Στο σημείο που η $\ell(t)$ τέμνει την σφαίρα θα ισχύει: $(1+t)^2+(1+2t)^2+(1+3t)^2=103$

Λύνω το τριώνυμο: $t_1 = \dfrac{-3\pm\sqrt{359}}{7}$

κρατάω τη θετική τιμή (για να κινηθώ στην κατεύθυνση του $(1,2,3)$).

Άρα η $\ell(t)$ τέμνει την σφαίρα στο $(1+t_1, 1+2t_1, 1+3t_1) = P_1$.

Η απόσταση αυτού του σημείου από το $P_0=(1,1,1)$ άρα το διάνυσμα $\vec{P_0P_1} = (t_1, 2t_1, 3t_1)$ που έχει μήκος $\sqrt{14}\,t_1$. Για να διανύσει αυτό το μήκος χρειάζεται χρόνο $= \sqrt{14}\cdot t_1/10$.

A35 (ii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Για $(x,y)\neq(0,0)$: $f_x = \dfrac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}$, $f_y = \dfrac{2x^4y - 2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2}$

Για $x=y^2$ $f_x(y^2,y) = \dfrac{2y^8}{4y^8} = \dfrac{1}{2}$ $(\neq 0)$. Άρα f_x όχι συνεχής στο $(0,0)$.

Είναι η f παραγωγίσιμη? Για $(x,y)\neq(0,0)$ ΝΑΙ! Στο $(0,0)$ χρησιμοποιώ τον ορισμό. Εξετάζω το όριο (*):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \lim \cdots \frac{x^2y^2}{(x^2+y^4)(x^2+y^2)^{1/2}} = ?$$

Έχω ότι: $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} \leq y^2 \quad \forall (x,y)\neq(0,0)$. Άρα:

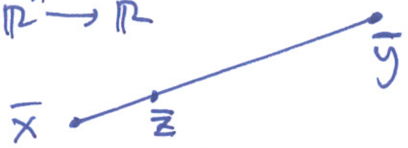
$$0 \leq \frac{x^2y^2}{(x^2+y^4)(x^2+y^2)^{1/2}} \leq \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{1/2}} \leq \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{1/2}} = (x^2+y^2)^{1/2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Άρα η f παραγωγίσιμη και στο $(0,0)$!

Ερ. Για μία συνάρτηση $f(x,y)$ η κατά κατεύθυνση παράγωγος στο $(0,0)$ υπάρχει $\forall$ κατεύθυνση. Είναι παραγωγίσιμη? Απ: ΌΧΙ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΑ βλ. σελ. 6!

Θ| (Θ μέσης τιμής)

για βαθμωτές συναρτήσεις $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$



Αν f ομαλή $\exists\, z$ τ.ω.

$$f(\bar{y}) - f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{z}) \cdot (\bar{y} - \bar{x})$$

όπου $\bar{z} \in [\bar{x}, \bar{y}]$ (το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το $\bar{x}$ και το $\bar{y}$)

Απόδ. Έστω $g(t) = f\big((1-t)\bar{x} + t\bar{y}\big)$ $\quad 0 \le t \le 1$.

$g(0) = f(\bar{x})$, $g(1) = f(\bar{y})$. Κάνω ΘΜΤ στην μία μεταβλητή

$$g(1) - g(0) = g'(\theta)(1-0) = g'(\theta) \quad \text{για κάποιο } 0<\theta<1$$

Άρα

$$f(\bar{y}) - f(\bar{x}) = \frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=\theta} = \frac{d}{dt} f\big((1-t)\bar{x} + t\bar{y}\big)\Big|_{t=\theta}$$

$$\overset{\text{καν. αλυσίδας}}{=} \nabla f\big((1-\theta)\bar{x} + \theta\bar{y}\big) \cdot \frac{d}{dt}\big((1-t)\bar{x} + t\bar{y}\big)\Big|_{t=\theta} =$$

$$= \nabla f(\bar{z}) \cdot (\bar{y} - \bar{x}), \qquad z = (1-\theta)\bar{x} + \theta\bar{y}.$$