Πολλαπλές μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{κ.λ.π.}$$

→ ΜΤ, σελ. 148 + παραδείγματα.

Συμβολισμός: Η f είναι C^2 αν έχει όλες τις 2ες παραγώγους και είναι συνεχείς. [πιο γενικά C^k αν έχει όλες τις k μερ. παραγώγους και είναι συνεχείς]

Θ1 Αν f είναι C^2 τότε $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

→ Αν f είναι C^2 τότε όλα καλά. Αν όχι προσοχή!!

Π1 (Α32, σελ. 156)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = ?$$

Απ: $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h}$$

Άρα πρέπει να υπολογίσω $f_y(h,0)$ κ $f_y(0,0)$.

$$f_y(h,0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(h,\tau) - \cancel{f(h,0)}^{=0}}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{h(h^2-\tau^2)}{h^2+\tau^2} = h \quad (\neq 0)$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\cancel{f(0,\tau)}^{=0} - \cancel{f(0,0)}^{=0}}{\tau} = 0$$

Συνεπώς: $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

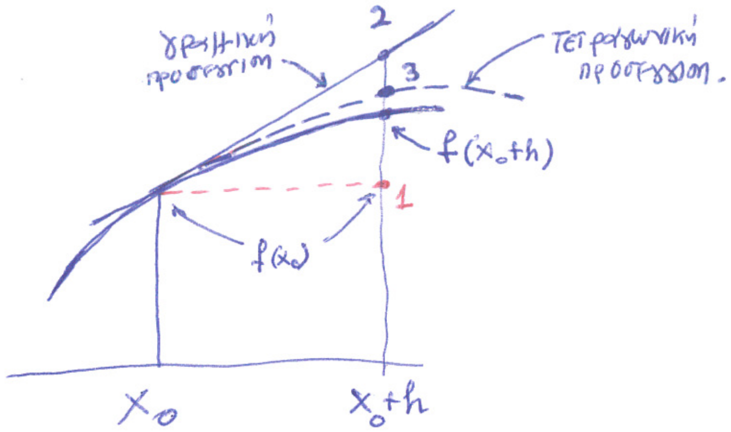
Με παρόμοιο τρόπο: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1$. (Η f δεν είναι C^2!)

Θεώρημα Taylor

Ας θυμηθούμε ΑΠ1: f ομαλή (από $\mathbb{R}$ σε $\mathbb{R}$):

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \cdots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)h^k + R_k(x_0,h)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_k(x_0,h)}{h^k} = 0.$$



Πολλές μεταβλητές: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο x_0, άρα $Df(x_0)$ υπάρχει και

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Df(x_0)(x-x_0)}{\|h\|} \xrightarrow[h \to (0,0)]{} 0$$

Έστω $R_1(x_0,h)$ ο αριθμητής. Τότε

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Df(x_0)(x-x_0) + R_1(x_0+h), \qquad \frac{R_1(x_0,h)}{\|h\|} \xrightarrow[h \to (0,0)]{} 0.$$

(ανάπτυγμα πρώτης τάξης).

Θ (ανάπτυγμα Taylor 2ης τάξης) Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι C^3 (C^2 είναι αρκετό)

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + R_2(x_0,h)$$

όπου $\frac{R_2(x_0,h)}{\|h\|^2} \to 0$ καθώς $h \to 0$.

Άλλος τρόπος γραφής: $f(x_0+h) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot h + \frac{1}{2} h^T H h + R_2(x_0,h)$

$$H = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Εσσιανός πίνακας $n \times n$ συμμετρικός.

h: διάνυσμα στήλης

→ MT, σελ 160.