Ακρότατα: όπως ΑΠ1. βλ. ΜΤ, σελ. 166.

κρίσιμο σημείο της $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$: αν $\nabla f(x_0) = 0$

(αντίστοιχο της $f'(x_0) = 0$ στον ΑΠ 1)

Θ| (κριτήριο 1ης παραγώγου) $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $x_0 \in U$ τοπικό ακρότατο, τότε $\nabla f(x_0) = 0$. Δηλ. x_0 κρίσιμο σημείο

βλ. παραδείγματα ΜΤ, σελ. 167-168.

Κριτήριο 2ης παραγώγου: Έστω x_0 κρίσιμο σημείο.

ΑΠ1: αν $f''(x_0) > 0$ ελάχιστο, < 0 μέγιστο. Διότι, αν δούμε το ανάπτυγμα Taylor. Παρόμοια και στις πολλές μεταβλητές.

Αν $\nabla f(x_0) = 0$, τότε:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{2} h^T H h + R_2(x_0, h)$$

όπου $$h^T H h = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j = Q(h) = Q(h_1, \dots h_n), \quad h \in \mathbb{R}^n.$$

Το Q είναι τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί στον συμμετρικό πίνακα $B = H$.

Ορ| Μία τετραγωνική μορφή Q λέγεται θετικά ορισμένη αν $Q(h) > 0 \ \forall h \neq 0$ και αρνητικά ορισμένη αν $Q(h) < 0 \ \forall h \neq 0$.

Θ| $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι C^2 και $x_0 \in U$ κρίσιμο σημείο της f.

1. Αν η τετραγωνική μορφή $h^T H h$ είναι θετικά ορισμένη τότε το x_0 είναι τοπικό ελάχιστο
2. Αν είναι αρνητικά ορισμένη, τότε x_0 τοπικό μέγιστο
3. Αν $\det H(x_0) \neq 0$ και η τ.μ. ούτε θετική ούτε αρνητική

αόριστη, τότε το x_0 είναι σαγματικό σημείο.

"Απόδειξη": Έστω $Q(h)=h^THh$. Ισχύει $Q(\lambda h)=\lambda^2 Q(h)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $h\in\mathbb{R}^n$. Στη συνέχεια θα δείξω ότι: υπάρχει $M>0$ τ.ω.
$Q(h)\geq M\|h\|^2$, $\forall h\in\mathbb{R}^n$. Πράγματι, έστω $\|h\|=1$ (μοναδιαίο) τότε $Q(h)\geq M$ (η μοναδιαία σφαίρα είναι κλειστή + φραγμένη άρα η Q έχει ελάχιστη τιμή). Έστω $h\in\mathbb{R}^n$ τυχαίο: Τότε

$$Q(h)=Q\left(\frac{h}{\|h\|}\cdot\|h\|\right)=\|h\|^2 Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\geq M\|h\|^2.$$

Πάμε τώρα στο ανάπτυγμα Taylor. Έστω Q θετικά ορισμένη.

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\underbrace{\frac{1}{2}h^THh}_{\frac{1}{2}Q(h)}+R_2(x_0,h)$$

$$\geq\frac{1}{2}M\|h\|^2+R_2(x_0,h)=\|h\|^2\underbrace{\left(\frac{1}{2}M+\frac{R_2(x_0,h)}{\|h\|^2}\right)}_{>\frac{1}{4}M\ (\text{για } h \text{ μικρό})\ >0}$$

Άρα x_0 σημείο ελαχίστου. $\square$

Υπάρχουν κριτήρια από Γραμμική Άλγεβρα που μας λένε πότε ένας πίνακας (οπότε και η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή) είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος: Έστω ο Εσσιανός πίνακας

$$H=Hf(x_0)=\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_0)\\ f_{x_2x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_2x_n}(x_0)\\ \vdots & \vdots & & \\ f_{x_nx_1}(x_0) & f_{x_nx_2}(x_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_0)\end{bmatrix} \quad (*)$$

Έστω $d_n=\det H$ και $d_k=\det H_k$ όπου H_k οι άνω αριστεροί $k\times k$ υποπίνακες του H $(k=1,2,\dots,n-1)$

δηλ. $d_1 = f_{x_1x_1}(x_0)$, $d_2 = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) \end{vmatrix}$

$$d_3 = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) & f_{x_1x_3}(x_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) & f_{x_2x_3}(x_0) \\ f_{x_3x_1}(x_0) & f_{x_3x_2}(x_0) & f_{x_3x_1}(x_0) \end{vmatrix}, \dots, d_n = \det H$$

Ισχύει: α) Αν $d_k > 0$ για $k=1,2,\dots n \Rightarrow H$ θετικά ορισμένος

β) $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$ κ.ο.κ (εναλλάξ) $\Rightarrow H$ αρνητικά ορισμένος.

Οπότε έχουμε:

Θ (κριτήριο 2ης παραγώγου) Έστω f C^2 και x_0 κρίσιμο σημείο και $H = Hf(x_0)$ όπως στην (✱), καθώς και τα $d_1, \dots, d_n$ όπως παραπάνω.

A. Έστω $d_n = \det H \neq 0$:

1. Αν $d_k > 0$ για $k=1,2,\dots n$ τότε x_0 σημείο τοπικού ελαχίστου
2. Αν $d_1<0$, $d_2>0$, $d_3<0$ κ.ο.κ. » " " " μεγίστου
3. Αν ούτε το (1.) ούτε το (2) τότε x_0 σαγματικό σημείο

B. Αν $d_n = \det H = 0$, τότε λέμε ότι το x_0 είναι εκφυλισμένο σημείο και πρέπει να χρησιμοποιηθούν άλλες μέθοδοι για να αναγνωρίσουμε την φύση του.

Παράδειγμα για το B: $f(x,y) = x^4 + y^4$, $f_x = 4x^3$, $f_y = 4y^3$

κρίσιμο σημείο $(x,y) = (0,0)$. $f_{xy} = 0$, $f_{xx} = 12x^2$, $f_{yy} = 12y^2$

$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, άρα $(0,0)$ εκφυλισμένο σημείο.

Προφανώς (διά παρατηρήσεως) το $(0,0)$ είναι σημείο ελαχίστου άφού $f(x,y) \geq 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ και $f(0,0) = 0$.