Θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή / τετραγωνικός πίνακας
συμμετρικός —"—

Βλ. ΜΤ, σελ. 172–173 για ειδική περίπτωση, (Λήμμα 2).

<u>Υπενθύμιση από Γραμμική Άλγεβρα:</u> Έστω A $n\times n$ συμμετρικός και $Q(x) = x^T A x$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Επειδή A συμμετρικός $\Rightarrow$ διαγωνοποιείται. Άρα υπάρχει αλλαγή (γραμμική) μεταβλητών $\bar{y} = R\bar{x}$ τ.ω. στο νέο σύστημα συντεταγμένων ο A να παριστάνεται από διαγώνιο πίνακα $D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, λ_i οι <u>ιδιοτιμές</u>.
Στο νέο (y-) σύστημα η τετραγωνική μορφή γράφεται

$$Q(x) = \bar{Q}(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Οπότε: Q (ισοδύναμα A) θετικά ορισμένη $\Leftrightarrow$ $\lambda_i > 0$, $i=1,\dots n$

— " — — αρνητικά " $\Leftrightarrow$ $\lambda_i < 0$ —"—

Αν υπάρχουν <u>και θετικές ιδιοτιμές</u> <u>και αρνητικές</u> η Q παριστάνει <u>σάγμα</u>. Έστω $\bar{x}_0$ κρίσιμο σημείο. Τότε κοντά στο x_0:

<u>Q θετικά ορισμένη</u>

παραβολοειδές με άνοιγμα προς τα πάνω

(x_0: σημείο ελαχίστου)

<u>Q αρνητικά ορισμένη</u>

παραβολοειδές με άνοιγμα προς τα κάτω

(x_0: σημείο μεγίστου)

<u>Q σάγμα</u>

ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

Βλ. ΜΤ, σελ. 174 Παραδείγματα 6 – 10.

Παρ. 7: $f(x,y) = \log(r^2+1) =: g(r)$, $r = (x^2+y^2)^{1/2}$

$$g'(r) = \frac{2r}{r^2+1} = 0 \Rightarrow r=0, \quad g(0)=0 \text{ και } g(r)>0 \ \forall r\neq 0$$

άρα 0 σημείο ελαχίστου.

Παρατήρηση: Για ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις είναι βολικό:

$$f_x = g'(r)\cdot\frac{dr}{dx} = g'(r)\,\frac{x}{r} \quad \text{κ.λπ.}$$

Παρ. 8: $f_{xx} = 2 + \frac{6}{x^4y^2}$, $f_{yy} = 2 + \frac{6}{x^2y^4}$, $f_{xy} = \frac{4}{x^3y^3}$.

Στα κρίσιμα σημεία: $f_{xx} = 8$, $f_{yy} = 8$, $f_{xy} = 4$ ή -4.

$f_{xx} > 0$ και $\det\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = 64-16 > 0$ και $\det\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 64-16>0$

(άρα ελάχιστο).

Παρ. 10: Βρείτε όλα τα κρίσιμα σημεία:

$$\left.\begin{aligned} x+yz&=0 \\ y+xz&=0 \\ z+xy&=0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x&=-yz \\ y&=-xz \\ z&=-xy \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow xyz = -(xyz)^2 \Leftrightarrow (1+xyz)\,xyz = 0.$

1. Έστω $x=0$. Τότε $y=z=0$. Άρα $(0,0,0)$ κρίσιμο σημείο.
   Στο ίδιο καταλήγω αν $y=0$ ή $z=0$.
2. Έστω $xyz=-1$ ($\Rightarrow x,y,z\neq 0$). $\rightsquigarrow yz = -\frac{1}{x}$

   Όμως $x=-yz \Rightarrow x = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$ ή $x=-1$

   α.) Έστω $x=1$. Τότε: $\begin{aligned} yz&=-1 \\ y&=-z \end{aligned} \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=1,\ z=-1$ ή $y=-1,\ z=1$

   β.) Έστω $x=-1$. Τότε $\begin{aligned} yz&=1 \\ y&=z \end{aligned} \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=1,\ z=1$ ή $y=-1,\ z=-1$

Τελικά τα κρίσιμα σημεία είναι: $(0,0,0)$, $(-1,-1,-1)$
$(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,1)$.

Ας ελέγξουμε το σημείο $(-1,-1,-1)$: $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 2$
και $f_{xy} = 2z$, $f_{xz} = 2y$, $f_{yz} = 2x$ άρα

$$Hf(-1,-1,-1) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \det H \neq 0$$

$$\left(\det H = 2\cdot 0 - (-2)(-8) + (-2)(+8) = -32 \right).$$

Οπότε $d_1 = 2 > 0$, $d_2 = 0$ και $d_3 = \det H < 0$, άρα σάγμα.

□

Άσκηση 1 (α) $f(x,y) = kx^2 - 2xy + ky^2$. Για ποιά k το $(0,0)$ είναι μη εκφυλισμένο τοπικό ελάχιστο? (μέγιστο?)

(β) $g(x,y,z) = kx^2 + kxz - 2yz - y^2 + \frac{k}{2}z^2$. Για ποιά k το $(0,0,0)$ είναι μη εκφυλισμένο τοπ. ελάχιστο? (μέγιστο?).

Απ (α) $f_x = 2kx - 2y$, $f_y = 2ky - 2x$. Το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο. $f_{xx} = 2k = f_{yy}$, $f_{xy} = -2$. Άρα ο Εσσιανός πίνακας

$$H = \begin{bmatrix} 2k & -2 \\ -2 & 2k \end{bmatrix}.$$

Για μη εκφυλισμένο τ. ελάχιστο θέλουμε: $\det H = 4(k^2-1) \neq 0$ και $2k > 0$, $4(k^2-1) > 0$. Άρα $k > 1$. Για τ. μέγιστο: $4(k^2-1) \neq 0$, $2k < 0$, $4(k^2-1) > 0 \Rightarrow k < -1$.

(β) $f_x = 2kx + kz$, $f_y = -2z - 2y$, $f_z = kx - 2y + kz$. Το $(0,0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο. $f_{xx} = 2k$, $f_{yy} = -2$, $f_{zz} = k$
$f_{xy} = 0$, $f_{yz} = -2$, $f_{xz} = k$

Εσσιανός πίνακας :
$$H = \begin{bmatrix} 2k & 0 & k \\ 0 & -2 & -2 \\ k & -2 & k \end{bmatrix}$$

Γιά νά έχω μή εκφυλισμένο σημείο πρέπει $\det H \neq 0$.

$\det H = 2k(-2k+4) + 0 + k(0+2k) = -2k^2+8k = -2k(k-4) \neq 0$

Γιά τ. ελάχιστο : $2k>0$, $-4k>0$, $-2k(k-4)>0$, αδύνατο!

Γιά τ. μέγιστο : $2k<0$, $-4k>0$, $-2k(k-4)<0$ $\Rightarrow$ $\underline{k<0}$.

A2 : Βρείτε και χαρακτηρίστε τά κρίσιμα σημεία της
$$f(x,y) = \frac{2y^3-3y^2-36y+2}{1+3x^2}$$

Απ : $f_x = -\frac{6x}{(1+3x^2)^2}(2y^3-3y^2-36y+2)$, $f_x=0 \Rightarrow x=0$; ...

$f_y = \frac{1}{1+3x^2}(6y^2-6y-36) = \frac{6}{1+3x^2}(y+2)(y-3)$

$f_y=0 \Rightarrow y=-2$ ή $y=3$, όμως $f_x(x,-2)\neq 0$ και $f_x(x,3)\neq 0$

Αρα κρίσιμα σημεία $(0,-2)$ και $(0,3)$.

$f_{xx} = -6\frac{1+3x^2-2x}{(1+3x^2)^3}(2y^3-3y^2-36y+2)$, $f_{yy} = \frac{6}{1+3x^2}(2y-1)$

$f_{xy} = -\frac{6x}{(1+3x^2)^2}(6y^2-6y-36)$. Στό $(0,-2)$ έχω :

$$Hf(0,-2) = \begin{bmatrix} -324 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad d_1=-324<0, \quad d_2=(-324)\cdot(-5)>0$$

$\Rightarrow$ $(0,-2)$ $\underline{\text{τ. μέγιστο}}$

$$Hf(0,3) = \begin{bmatrix} 312 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix}, \quad d_1=312>0, \quad d_2=312\cdot30>0$$

$\Rightarrow$ $(0,3)$ τ. ελάχιστο.

Ολικά ακρότατα σε συμπαγή σύνολα

Ορ| $D \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\iff$ D κλειστό και φραγμένο.

Το D είναι φραγμένο αν $\|x\| < M$, $\forall x \in D$ για κάποιο $M > 0$

είναι κλειστό αν "περιέχει το σύνορό του"

$D = U \cup \partial U$.

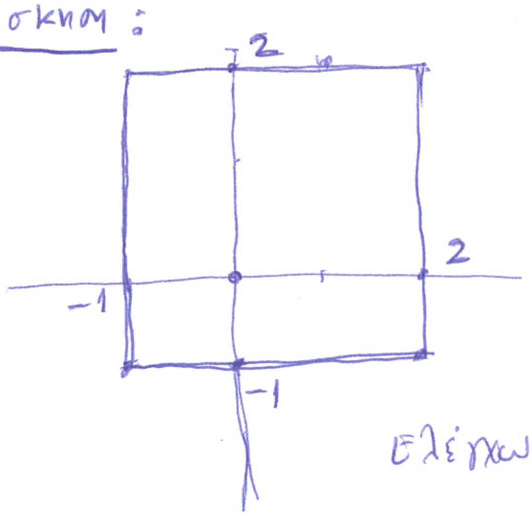
Θ| Αν $D \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $f : D \to \mathbb{R}^n$ συνεχής, τότε λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο, δηλ. $\exists\, x_m \in D$ και $x_M \in D$ τ.ω.

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \quad \forall x \in D.$$

* Προσοχή: Όταν αναζητούμε ακρότατα ολικά εκτός από τα κρίσιμα σημεία πρέπει να ελέγχουμε και το σύνορο ∂D!

→ βλ. MT, σελ. 180 Παρ. 11

Άσκηση:



Έστω T το κλειστό τετράγωνο του σχήματος, και $f : T \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$$

Βρείτε τα ολικά ακρότατα της f στο T.

Ελέγχω το εσωτερικό του T: $f_x = 0$, $f_y = 0$

$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ κρίσιμο σημείο. $f_{xx} = 2 = f_{yy}$, $f_{xy} = -1$

και $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $2 > 0$, $4 - 1 = 3 > 0$ άρα τοπικό ελάχιστο

και $f(0,0) = 1$. Πρέπει να ελέγξω το σύνορο. Αποτελείται από 4 κομμάτια.

1. Κάτω πλευρά $(y=-1)$: $f_1(x) = f(x,-1) = x^2+x+2$, $-1 \le x \le 2$

$f_1'(x) = 2x+1$, άρα κρ. σημείο $x = -\frac{1}{2}$, $f_1''(x) = 2 > 0$, άρα τ. ελάχιστο

$f_1(-\frac{1}{2}) = 7/4$, $f_1(-1) = f(-1,-1) = 2$, $f_1(2) = f(2,-1) = 8$

2. Πάνω πλευρά $(y=2)$: $f_2(x) = f(x,2) = x^2-2x+5$, $-1 \le x \le 2$

$f_2'(x) = 2(x-1)$, άρα $x=1$ κρ. σημείο. $f_2(1) = f(1,2) = 4$,

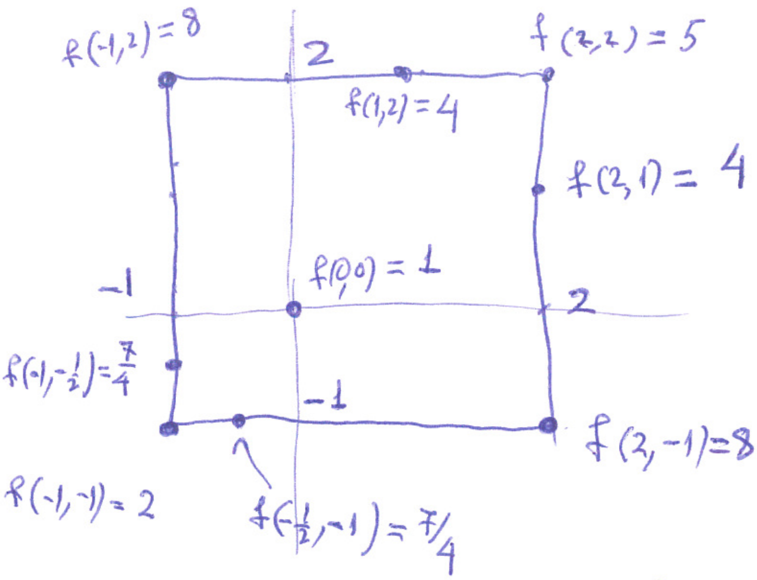
$f_2(-1) = f(-1,2) = 8$, $f_2(2) = f(2,2) = 5$

3. Αριστερή πλευρά $(x=-1)$: $f_3(x) = f(-1,y) = y^2+y+2$, $-1 \le y \le 2$

$f_3'(y) = 2y+1$, άρα $y = -1/2$ κρισ. σημείο $f_3(-\frac{1}{2}) = f(-1,-\frac{1}{2}) = 7/4$

4. Δεξιά πλευρά $(x=2)$: $f_4(x) = f(2,y) = y^2-2y+5$, $-1 \le y \le 2$

$f_4'(y) = 2(y-1) \Rightarrow y=1$ κρισ. σημείο $f_4(1) = f(2,1) = 4$



Συνολικά έχουμε 9 πιθανά σημεία ολικών ακροτάτων!

Συγκρίνοντας τιμές καταλήγουμε:

Ολικό ελάχιστο στο $(0,0)$ και $f(0,0) = 1$.

Ολικό μέγιστο στα $(-1,2)$ και $(2,-1)$ και $f(-1,2) = f(2,-1) = 8$.