



Πέμπτη 22 Απριλίου 2021

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός II

Φυλλάδιο 11

1) Ο τύπος του Ήρωνα για το εμβαδον τριγώνου με πλευρές x, y, z είναι

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)},$$

όπου s η ημιπερίμετρος του τριγώνου, δηλ. $s = \frac{1}{2}(x+y+z)$. Δείξτε ότι ανάμεσα στα τρίγωνα με δοσμένη περίμετρο, αυτό που έχει το μεγαλύτερο εμβαδον είναι το ισόπλευρο.

2) Έστω E η έλλειψη που προκύπτει από την τομή του ελλειψοειδούς $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{25} = 1$ και του επιπέδου $x+y+z=0$. Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση των σημείων της E από την αρχή των αξόνων.

3) Δείξτε ότι η

$$xy + z + 3xz^5 = 4,$$

λύνεται με το z σαν συνάρτηση του (x, y) κοντά στο $(1, 0, 1)$. Υπολογίστε τις $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$ στο $(x, y) = (1, 0)$.

4) Δείξτε ότι η

$$x^3z^2 - z^3yx = 0,$$

λύνεται ως προς z , σαν συνάρτηση του (x, y) κοντά στο $(1, 1, 1)$, όχι όμως κοντά στην αρχή των αξόνων. Υπολογίστε τις $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$ στο $(x, y) = (1, 1)$. Υπολογίστε την $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ στο $(x, y) = (1, 1)$.

5) Εξετάστε την επιλυσιμότητα του παρακάτω συστήματος

$$3x + 2y + z^2 + u + v^2 = 0$$

$$4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 = 0$$

$$x + z + w + u^2 + 2 = 0,$$

ως προς u, v, w συναρτήσει των x, y, z κοντά στο $x = y = z = 0, u = v = 0$ και $w = -2$.

6) Θεωρούμε την

$$f(x, y) = \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{xy}{x^2 + y^2} \right].$$

Αντιστρέφεται τοπικά αυτή η απεικόνιση του $\mathbf{R}^2 \setminus (0, 0)$ στον \mathbf{R}^2 κοντά στο $(x, y) = (0, 1)$;

7) Έστω $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ κλάσεως C^1 και ας θέσουμε

$$u = f(x)$$

$$v = -y + xf(x).$$

Αν $f'(x_0) \neq 0$, δείξτε ότι αυτός ο μετασχηματισμός του \mathbf{R}^2 στον \mathbf{R}^2 είναι αντιστρέψιμος κοντά στο (x_0, y) και ο αντίστροφός του δίνεται από τις

$$x = f^{-1}(u)$$

$$y = -v + uf^{-1}(u).$$