



Τρίτη 4 Μαΐου 2021

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός II

Φυλλάδιο 12 (Επαναληπτικό)

1) Ελέγξτε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς ή/και παραγωγίσιμες στο αντίστοιχο σημείο.

(i) $f(x, y, z) = 3x^2z + xye^{\cos^2 z}$, στο σημείο $(1, 1, 2)$.

(ii)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+2y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad \text{στο σημείο } (0, 0).$$

(iii)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+2y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad \text{στο σημείο } (0, 0).$$

2) Μια ισοσταθμική επιφάνεια μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x, y, z)$ έχει σε ένα σημείο της (x_0, y_0, z_0) εφαπτόμενο επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση

$$3x - 2y + 6z = 15 \quad \text{και} \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0).$$

Σε ποιές κατευθύνσεις \mathbf{v} από το (x_0, y_0, z_0) είναι δυνατόν να έχει η συνάρτηση (α) μέγιστο στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής; (β) μηδενικό στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής;

3) Δίνεται $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = (x + y)e^{-x^2-y^2}, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Αποδείξτε ότι

$$-e^{-\frac{1}{2}} \leq f(x, y) \leq e^{-\frac{1}{2}}, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

4) Έστω $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ είναι $C^1(\mathbf{R}^2)$ συνάρτηση που ικανοποιεί

$$f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y) = 1, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Θέτουμε $g(r, \theta) = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

Αποδείξτε ότι

$$g_r^2(r, \theta) + \frac{1}{r^2} g_\theta^2(r, \theta) = 1, \quad r > 0, \theta \in [0, 2\pi).$$

5) Έστω $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$;

6) Η τομή της επιφάνειας

$$z = 3x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - 4y^2,$$

και του επιπέδου $2x - y = 1$ είναι η καμπύλη γ . Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη γ στο σημείο $(1, 1, -\frac{23}{24})$

7) Στις παρακάτω περιπτώσεις υπολογίστε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης της f συναρτήσεως των μερικών παραγώγων μέχρι και δεύτερης τάξης των εμπλεκόμενων στον τύπο της f συναρτήσεων.

- $f(x, y, z) = g(u(x, y), v(y, z), w(y, z))$.
- $f(x, y, z) = g(u(x), v(x, y), w(x, y, z))$.

8) Έστω E το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της $f(x, y) = x^2 + 3xy$ στο σημείο $(1, 1, 4)$. Σε ποια σημεία της επιφάνειας με καρτεσιανή εξίσωση $5x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$ έχει εφαπτόμενο επίπεδο παράλληλο με το E ;

9) Εξετάστε βάσει του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης αν το παρακάτω σύστημα δύο εξισώσεων μπορεί να λυθεί ως προς τα u, v ως συναρτήσεις $u = u(x), v = v(x)$ με συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης σε κάποια περιοχή του $x_0 = 0$ και έτσι ώστε να είναι $u_0 = u(0) = 1, v_0 = v(0) = 1$. Βρείτε τύπο για τις παραγώγους $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}$ συναρτήσεως των x, u, v κοντά στα $x_0 = 0, u_0 = 1, v_0 = 1$.

$$e^{xv} + x + u = 2, \quad v + xe^u = 1.$$

10) Έστω

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

- Να προσδιορίσετε στον \mathbf{R}^2 τα σημεία όπου η f λαμβάνει τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα,
- προσδιορίστε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f στο κλειστό χωρίο $x^2 + y^2 \leq 1$.

11) Υποθέτουμε ότι η u ορίζεται ως συνάρτηση των x και y μέσω της εξίσωσης

$$u = F(x + u, yu).$$

Να εκφραστούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}$ και $\frac{\partial u}{\partial y}$ συναρτήσεως των μερικών παραγώγων της F .