



Πέμπτη 4 Μαρτίου 2021

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός II

Φυλλάδιο 4

1) Βρείτε τις μερικές παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων

$$(a) f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/3}, \quad (b) f(x, y, z) = x^2 y z^3, \quad (c) f(x, y) = x^y - y \sin x,$$

$$(d) f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2.$$

2) Έστω  $f(x, y) = e^{xy}$ . Δείξτε ότι

$$x \frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

3) Πού συναντά τον άξονα των  $z$  το εφαπτόμενο επίπεδο της  $z = e^{x-y}$  στο σημείο  $(1, 1, 1)$ ;

4) Δίδονται οι συναρτήσεις  $f(x, y) = x^2 + y^2$  και  $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ . Δείξτε ότι τα γραφήματά τους εφάπτονται στο σημείο  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , δηλ. δείξτε ότι σε αυτό το σημείο οι δύο συναρτήσεις έχουν κοινό εφαπτόμενο επίπεδο.

5) Δίδεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Υπολογίστε τις  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  και  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ . Είναι η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$ ;

6) Ο  $A = \{a_{ij}\}$  είναι  $n \times n$  τετραγωνικός συμμετρικός πίνακας και  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ . Υπολογίστε τα

$$(a) \nabla \|\mathbf{x}\|, \quad (b) \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \right).$$

7) Βρείτε τα παρακάτω όρια, εφόσον υπάρχουν

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 y^3}{x^6 + y^4}, \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sin(x - y + 1)}{x + y - 3}, \quad (c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^{y^2}.$$