



Πέμπτη 11 Μαρτίου 2021

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός II

Φυλλάδιο 5

1) Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ -1, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Βρείτε τη τιμή της ποσότητας $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$.

2) Περιγράψτε τις παρακάτω καμπύλες

$$\mathbf{c}(t) = (\sin t, 3 \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\mathbf{c}(t) = (2 \sin t, \cos t, t), \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Στη συνέχεια βρείτε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα την τυχαία χρονική στιγμή t .

3) Ένα σωματίδιο ακολουθεί την καμπύλη $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$, την οποία εγκαταλείπει στην κατεύθυνση της εφαπτομένης όταν $t = 2$. Βρείτε τη θέση του σωματιδίου όταν $t = 3$.

4) Ελέγξτε ως προς την παραγωγισιμότητα την συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

5) Έστω $f(u, v) = (\tan(u - 1) - e^v, u^2 - v^2)$ και $g(x, y) = (e^{x-y}, x - y)$. Υπολογίστε την $f \circ g$ και την $\mathbf{D}(f \circ g)(1, 1)$.

6) Βρείτε την $\frac{d}{dt}[f(\mathbf{c}(t))]$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$(a) f(x, y) = xy, \quad \mathbf{c}(t) = (e^t, \cos t), \quad (b) f(x, y) = e^{xy}, \quad \mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3).$$

7) Έστω $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $(x, y) \rightarrow (e^{x+y}, e^{x-y})$. Έστω $\mathbf{c}(t)$ μια καμπύλη με $\mathbf{c}(0) = (0, 0)$ και $\mathbf{c}'(0) = (1, 1)$. Ποιο είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην εικόνα της f για $t = 0$;