



Πέμπτη 18 Μαρτίου 2021

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός II

Φυλλάδιο 6

1) Έστω $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $r = \|\mathbf{x}\|$ και $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Δείξτε ότι

$$\nabla f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{x}}{r}.$$

Στη συνέχεια βρείτε βαθμωτή συνάρτηση f τ.ω. $\nabla f = \mathbf{x}$.

2) Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ -1, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Σε ποιά κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί κανείς όταν βρίσκεται στο σημείο $(1, 1)$, ώστε η f

- (i) να έχει τη μέγιστη δυνατή αύξηση;
- (ii) να έχει τη ελάχιστη δυνατή αύξηση;
- (iii) να μην έχει μεταβολή;

3) Έστω $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο \mathbf{z} που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία \mathbf{x} και \mathbf{y} τ.ω.

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{z}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

4) Δίδεται η συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } x > 0 \text{ \& } 0 < y < x^2, \\ 2, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Δείξτε ότι στο σημείο $(0, 0)$ υπάρχουν **όλες** οι κατα κατεύθυνση παράγωγοι (δηλ. ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση \mathbf{v}). Παρατηρήστε ότι στο σημείο $(0, 0)$ η συνάρτηση f δεν είναι καν συνεχής!

5) Βρείτε ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην

- (i) επιφάνεια $x^3 y^3 + y - z + 2 = 0$ στο σημείο $(0, 0, 2)$,
- (ii) επιφάνεια $\cos xy = e^z - 2$ στο σημείο $(1, \pi, 0)$.

Στη συνέχεια βρείτε τα αντίστοιχα εφαπτόμενα επίπεδα.

6) Μια ισοσταθμική επιφάνεια μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x, y, z)$ έχει σε ένα σημείο της (x_0, y_0, z_0) εφαπτόμενο επίπεδο με καρτεσιανή εξίσωση

$$3x - 2y + 6z = 15 \quad \text{και} \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0).$$

Σε ποιές κατευθύνσεις \mathbf{v} από το (x_0, y_0, z_0) είναι δυνατόν να έχει η συνάρτηση (α) μέγιστο στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής; (β) ελάχιστο στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής; (γ) μηδενικό στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής;