



Πέμπτη 8 Απριλίου 2021

Σ. Φίλιππας

Απειροστικός Λογισμός II

Φυλλάδιο 9

1) Βρείτε τα κρίσιμα σημεία και προσδιορίστε τη φύση τους

(i) $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2$,

(ii) $f(x, y) = e^{-x}(x^2 - y^2)$,

(iii) $f(x, y, z) = x^3 + xz^2 - 3x^2 + y^2 + 2z^2$,

(iv) $f(x, y, z) = xy + xz + 2yz + \frac{1}{x}$,

2) Βρείτε το σημείο του επιπέδου $2x - y + 2z = 20$ που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

3) Αποδείξτε ότι μεταξύ των ορθογώνιων κουτιών με δεδομένο όγκο, εκείνο που έχει το ελάχιστο εμβαδό επιφάνειας είναι ο κύβος.

4) Προσδιορίστε τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση της αρχής των αξόνων από την καμπύλη $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

5) Έστω $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ διαφορετικά ανά 2 σημεία του $\mathbf{R}^n$. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2,$$

έχει ελάχιστη τιμή στο σημείο $\mathbf{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i$, το κέντρο βάρους των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$.

6) Έστω $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$. Δείξτε ότι σε κάθε ευθεία γραμμή $y = mx$, η συνάρτηση $f(x, mx)$ έχει ελάχιστο στο σημείο $(0, 0)$. Στη συνέχεια δείξτε ότι το $(0, 0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $f(x, y)$.