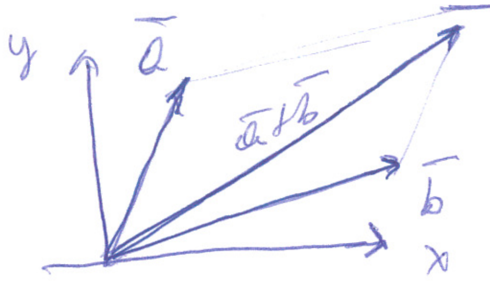
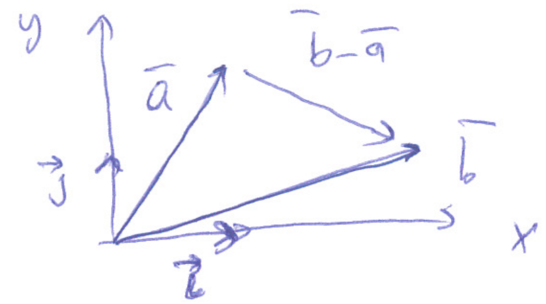
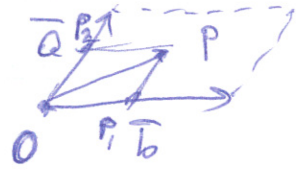
Διανύσματα





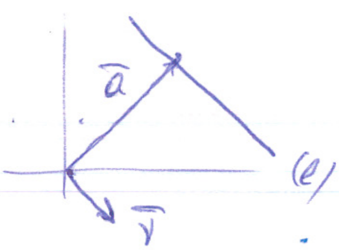
Παράδειγμα 1 (Π1): Περιγράψτε τα σημεία εντός του παρ/μου με πλευρές τα $\bar a$, $\bar b$:



$$\overline{OP} = \overline{OP_1} + \overline{OP_2} = t\bar b + s\bar a \quad 0 \le t, s \le 1.$$

$$\left(\lambda \bar b \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\right)$$

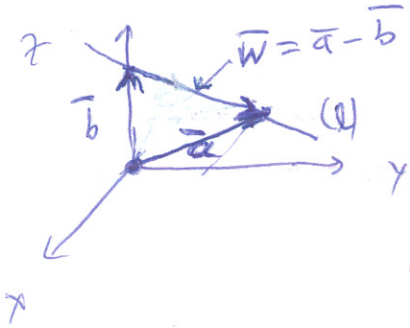
Π2: Εξίσωση ευθείας που περνάει από το $\bar a$ και είναι παράλληλη στο $\vec v$



$$l(t) = \bar a + t\bar v, \quad t \in \mathbb{R}$$

παραμετρική απεικόνιση (t = παράμετρος)

Π3 Εξίσωση ευθείας που περνάει από τα σημεία $(-1, 1, 0) = \bar a$ και $(0, 0, 1) = \bar b$

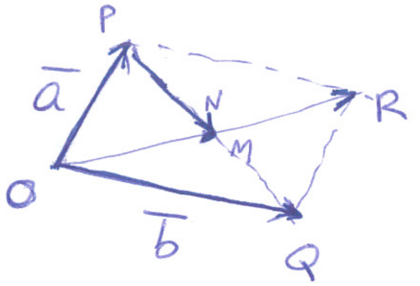


Έστω $\bar w = \bar a - \bar b$. Τότε η ευθεία περνάει από το $\bar b$ και είναι παράλληλη στο $\bar w$ άρα

$$l(t) = \bar b + t\bar w = \bar b + t(\bar a - \bar b) \Rightarrow$$

$$l(t) = (0, 0, 1) + t(-1, 1, -1) = (-t, t, 1-t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Π4 Οι διαγώνιοι παραλ/μου διχοτομούνται.



Έστω M το μέσον της διαγωνίου OR και N το μέσο του PQ.

Θα δείξω ότι $\vec{OM} = \vec{ON}$.

$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OR} = \frac{1}{2}(\bar{a}+\bar{b})$. και $\overline{ON} = \overline{OP} + \overline{PN} = \bar{a} + \frac{1}{2}\overline{PQ}$

$= \bar{a} + \frac{1}{2}(\bar{b}-\bar{a}) = \frac{1}{2}(\bar{a}+\bar{b})$.

Π5 Ελέγξατε κατά πόσον οι ευθείες $(t, -6t+1, 2t-8)$ και $(3t+1, 2t, 0)$ τέμνονται.

Απ. Θα πρέπει να υπάρχουν $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω.

$$(t_1 - 6t_1 + 1, 2t_1 - 8) = (3t_2+1, 2t_2, 0)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} t_1 - 6t_1 &= 3t_2 + 1 \\ -6t_1 + 1 &= 2t_2 \\ 2t_1 - 8 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} t_2 &= 1 \\ -6\cdot t_1 + 1 &= 2t_2 \\ t_1 &= 4 \end{aligned} \iff -24+1=2 \; ✗.$$

Άρα <u>ΔΕΝ</u> τέμνονται.

~~Εξίσωση ευθείας που περνάει από τα σημεία P=(1,2,3) και (3,4,0) = Q.~~

Εσωτερικό γινόμενο: $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$

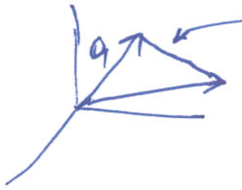
$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Ιδιότητες: $\bar{a}\cdot\bar{a} \geq 0$ και $= 0 \iff \bar{a} = 0$.

$(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b} = \lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$, $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$, $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot\bar{c}$.

μοναδιαία διανύσματα: $\frac{\bar a}{\|\bar a\|}$.

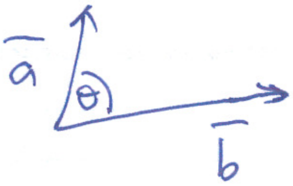
απόσταση:



$\|\vec a - \bar b\|$

→ γωνία μεταξύ διαν/των:

Θ/



$0 \le \theta \le \pi$, $\quad \bar a \cdot \bar b = \|a\| \cdot \|b\| \cos\theta$

(→ $\cos\theta = \frac{\bar a \cdot \bar b}{\|\bar a\| \cdot \|\bar b\|}$.)

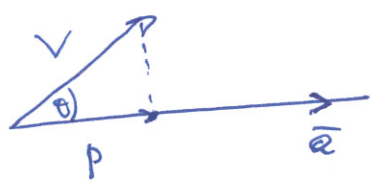
Αποδ. βλ. MT, p. 22

→ Ανισότητα Cauchy-Schwarz : $|\bar a \cdot \bar b| \le \|\bar a\| \cdot \|\bar b\|$.

Αποδ/ $\quad |\bar a \cdot \bar b| = \|\bar a\| \cdot \|\bar b\| \cdot \underbrace{|\cos\theta|}_{\le 1} \le \|\bar a\| \cdot \|\bar b\|$.

→ Τριγωνική ανισότητα: $\quad \|\bar a + \bar b\| \le \|\bar a\| + \|\bar b\|$.

→ Προβολή του διαν. $\bar V$ στο διάνυσμα $\bar a$:



$$\vec p = \frac{\bar a \cdot \bar V}{\|\bar a\|^2}\, \bar a$$

διότι: $\quad \vec V = \|V\| \cos\theta \, \frac{\vec a}{\|\vec a\|} = \frac{\|V\| \cdot \|a\| \cos\theta}{\|a\|^2}\, \vec a = \frac{\bar a \cdot \bar V}{\|\bar a\|^2}\, \bar a$.

→ Εξωτερικό γινόμενο: $\bar a = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec i + a_2\vec j + a_3\vec k$

$\bar b = b_1\vec i + b_2\vec j + b_3\vec k$

$$\bar a \times \bar b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - b_2a_3)\vec i - (a_1b_3 - b_1a_3)\vec j + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec k$$

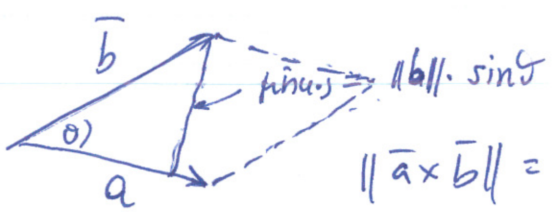
→ $\bar a \times \bar b = -\bar b \times \bar a$, $\quad \bar a \times (\mu \bar b + \nu \bar c) = \mu(\bar a \times \bar b) + \nu(\bar a \times \bar c)$ $\quad \mu, \nu \in \mathbb{R}$.

$\bar a \times \bar a = 0$.

→ Τριπλό γινόμενο: $(\bar a \times \bar b)\cdot c = \dots = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

<u>Γεωμετρικός ορισμός εξ. γινομένων</u>: $\bar a \times \bar b = \|\bar a\| \cdot \|\bar b\| \cdot \sin\theta$

ΜΤ,Ρ. 37.

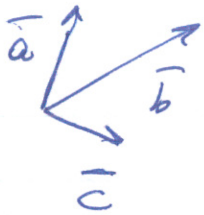


$\|\bar a \times \bar b\| =$ εμβαδόν παραλ/μου.

<u>Π6</u> Βρείτε μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο $\bar a = (1,1,0)$ και $\bar b = (0,1,1)$. Το $\vec v = \vec a \times \vec b$ είναι κάθετο και στα 2. Το $\frac{\bar v}{\|\bar v\|}$ είναι το ζητούμενο διάνυσμα:

$$\bar v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -1, 1) \quad \text{και} \quad \bar n = \frac{\bar v}{\|\bar v\|} = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt 3}$$

∎



$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

= όγκος παραλληλεπιπέδου με πλευρές τα $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

→ Εξίσωση επιπέδου (P): Το P είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B, \Gamma)$ και περνάει από το σημείο (x_0, y_0, z_0). Τότε έχει εξίσωση

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + \Gamma(z-z_0) = 0$$

ή $Ax + By + \Gamma z + D = 0$, όπου $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$

ΠΧ Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τα 3 σημεία: $(1,1,1)$, $(2,0,0)$, $(1,1,0)$. M.T. → p. 42

→ Απόσταση σημείου $E = (x_1, y_1, z_1)$ από το επίπεδο P: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = Ax + By + Cz + D = 0$.

$$D = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

MT → p. 43