ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 7 Οκτωβρίου 2021

Σ. Φίλιππας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι τμ. Β

Φυλλάδιο 1

1) Έστω τα σύνολα

$$\begin{aligned} A &= \{\frac{n}{n+1},\ n=1,2,3,\ldots\}, \\ B &= \{\frac{2}{x+3},\ x \geq 0\}, \\ C &= \{\frac{(-1)^n}{n+1},\ n=1,2,3,\ldots\}. \end{aligned}$$

Δείξτε οτι είναι άνω και κάτω φραγμένα. Βρείτε, με απόδειξη, τα sup και inf των συνόλων αυτών. Στη συνέχεια βρείτε, εφ΄όσον υπάρχουν, τα max και min.

2) Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n \in N$ τ.ω. $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

3) Αν $a + \varepsilon > b$ για κάθε $\varepsilon > 0$, δείξτε ότι $a \geq b$.

4) Έστω $A,\ B \subset \mathbf{R}$ μη κενά και φραγμένα σύνολα και ορίζουμε

$$A - B := \{a - b : a \in A,\ b \in B\}.$$

(i) Δείξτε ότι

$$\sup(A - B) \leq \sup A - \inf B.$$

(ii) Στη συνέχεια δείξτε οτι ισχύει και η ανάποδη ανισότητα, δηλ. $\sup(A - B) \geq \sup A - \inf B$ και συνεπώς

$$\sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$

5) Σκοπός της άσκησης είναι να μιμηθούμε την απόδειξη που δώσαμε στην τάξη για την ύπαρξη της τετραγωνικής ρίζας του 2 και να αποδείξουμε την ύπαρξη της κυβικής ρίζας του 5 (φυσικά στη θέση του 5 θα μπορούσαμε να έχουμε τον οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό a). Θεωρείστε το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbf{R} : x^3 < 5\}.$$

(i) Δείξτε οτι είναι μη κενό και άνω φραγμένο, συνεπώς υπάρχει το $b = \sup A \in \mathbf{R}$.

(ii) Δείξτε οτι αν ίσχυε ότι $b^3 < 5$, τότε για κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$, θα είχαμε ότι $(b+\varepsilon)^3 < 5$. Βρείτε μια εκτίμηση για το ε.

(iii) Δείξτε οτι αν ίσχυε ότι $b^3 > 5$, τότε για κατάλληλα μικρό $\varepsilon > 0$, θα είχαμε ότι $(b-\varepsilon)^3 > 5$. Βρείτε μια εκτίμηση για το ε.

(iv) Δείξτε ότι $b^3 = 5$.