



Πέμπτη 09 Δεκεμβρίου 2021

Σ. Φίλιππας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι τμ. Β

Φυλλάδιο 10

1) Έστω $f, g : I \rightarrow \mathbf{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, όπου I διάστημα. Αν $f^2(x) = g^2(x) > 0, \forall x \in I$ τότε είτε $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x), \forall x \in I$.

2) Έστω $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ η συνάρτηση

$$f(x) = x^7 + x^3 + x.$$

Δείξτε ότι

(i) η f είναι 1-1 και επί.

(ii) η $f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ είναι συνεχής.

(iii) Αν η συνάρτηση $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ είναι τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} (g^7(x) + g^3(x) + g(x)) = 0,$$

δείξτε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

3) Ελέγξτε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια στο $(0, 1)$ τις συναρτήσεις,

$$(i) \sin \frac{1}{x}, \quad (ii) \ln x, \quad (iii) e^x \cos \frac{1}{x}.$$

4) Ελέγξτε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια στο $[0, +\infty)$ τις συναρτήσεις,

$$(i) x \sin x, \quad (ii) \sin^2 x \quad (iii) \sin \sin x.$$

5) Δείτε στη Wikipedia το σχετικό βιντεάκι για την ομοιόμορφη συνέχεια (uniform continuity).