ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 23 Δεκεμβρίου 2021

Σ. Φίλιππας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι τμ. Β

Φυλλάδιο 12

1) Η συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη και έστω $x_0\in(a,b)$. Αν γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to x_0} f'(x)=l\in\mathbf{R}$ δείξτε ότι η f' είναι συνεχής στο σημείο x_0 δηλ. $f'(x_0)=l$.

(Υποδ. Χρησιμοποείστε κατάλληλα το Θ. Darboux.)

2) Έστω $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι Lipschitz σε κάθε φραγμένο διάστημα.

3) Για $x>0$, $y>0$, δείξτε ότι

(i) $\quad x\ln x+y\ln y\ge(x+y)\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$

(ii) $\quad \frac{x^p}{p}+\frac{x^q}{q}\ge xy,\qquad p>0,\qquad q>0,\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

(Υποδ. Χρησιμοποιείστε κατάλληλες κυρτές συναρτήσεις)

4) Έστω $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ κυρτή συνάρτηση τ.ω. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0,\infty)$.

5) Η συνάρτηση f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ και τέτοια ώστε $f(-1)=f(0)=f'(0)=0$, $f(1)=1$. Δείξτε οτι υπάρχει σημείο $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\xi)\le 3$.

(Υποδ. Χρησιμοποιώντας Θ. Taylor στο $(0,1)$ και στο $(-1,0)$ δείξτε οτι υπάρχουν $s\in(0,1)$ και $t\in(-1,0)$ τέτοια ώστε: $f^{(3)}(s)+f^{(3)}(t)=6$.)