



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 14 Οκτωβρίου 2021

Σ. Φίλιππας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι τμ. Β

Φυλλάδιο 2

1) Έστω $x > 0$, $y > 0$ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους γνωρίζουμε ότι

$$x < \delta y, \quad \forall \delta > 10.$$

Δείξτε ότι $x \leq 10y$.

2) Αποδείξτε με χρήση του ορισμού τού ορίου ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1 + n^2} = 1.$$

3) Δίδεται ακολουθία $\{a_n\}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Αποδείξτε με χρήση του ορισμού τού ορίου ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = a^2$.

4) Δίδονται οι ακολουθίες $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $n \in \mathbf{N}$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$. Αποδείξτε με χρήση του ορισμού τού ορίου ότι

(i) υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ τ.ω.

$$b_n > a_n, \quad \forall n \geq n_0.$$

(ii) υπάρχει $n_1 \in \mathbf{N}$ τ.ω.

$$b_n - a_n > \frac{1}{2}, \quad \forall n \geq n_1.$$