



Πέμπτη 28 Οκτωβρίου 2021

Σ. Φίλιππας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι τμ. Β

Φυλλάδιο 4

1) Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση της ακολουθίας

$$a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n, \quad b_n = (n + 1 + n \cos n)^{\frac{1}{2n+n \cos n}}.$$

2) Δίνεται η ακολουθία $\{a_n\}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι οι υπακολουθίες $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n+1}\}$, $\{a_{7n}\}$, είναι συγκλίνουσες. Αποδείξτε τότε ότι η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι επίσης συγκλίνουσα ακολουθία.

Υπόδειξη: Αποδείξτε αρχικά, με κατάλληλη επιλογή υπακολουθιών, ότι όλες οι υπακολουθίες συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

3) Ελέγξτε αν οι παρακάτω ακολουθίες είναι Cauchy

(i)

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n},$$

(ii)

$$b_n = \frac{\arctan 1}{2} + \frac{\arctan 2}{2^2} + \dots + \frac{\arctan n}{2^n}.$$

4) (i) Γράψτε, με τους κατάλληλους ποσοδείκτες, τι σημαίνει η ακολουθία $\{x_n\}$ να **μην συγκλίνει** στο x (δηλ. την άρνηση του ορισμού της σύγκλισης).

(ii) Δείξτε ότι αν κάθε υπακολουθία $\{x_{k_n}\}$ της ακολουθίας $\{x_n\}$ έχει υπακολουθία $\{x_{m_{k_n}}\}$ που συγκλίνει στο x τότε και η $\{x_n\}$ συγκλίνει στο x .