



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 4 Νοεμβρίου 2021

Σ. Φίλιππας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι τμ. Β

Φυλλάδιο 5

1) Βρείτε, με απόδειξη, το $\limsup$ και $\liminf$ των ακολουθιών

$$a_n = \sqrt[n]{4(-1)^n + 2}, \quad b_n = \left(\cos \frac{n\pi}{3}\right)^n, \quad c_n = \frac{n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+1}.$$

2) Δείξτε ότι αν $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ φραγμένες ακολουθίες, τότε

(i) $\underline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n \leq \underline{\lim}(a_n + b_n),$

(ii) $\overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n \geq \overline{\lim}(a_n + b_n).$

3) Μελετήστε και κατανοήστε την απόδειξη του Θεωρήματος (ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{k_n}) τ.ω. $x_{k_n} \rightarrow \limsup x_n$) στην σελ. 22 των σημειώσεων Μήτση (δεν χρειάζεται να παραδώσετε κάτι).

4) Δίδεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όπου $a_n > 0$, αποκλίνει. Δείξτε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ αποκλίνει. Τι μπορούμε να πούμε για την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$;

5) Μελετήστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}.$$