



Πέμπτη 18 Νοεμβρίου 2021

Σ. Φίλιππας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι τμ. Β

Φυλλάδιο 7

1) Μελετήστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}, \quad a \in \mathbf{R}$$

2) Έστω

$$a_n = \frac{1}{\ln n + (-1)^n n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Μελετήστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n - \frac{(-1)^n}{n} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

3 Δίδεται η ακολουθία  $a_n = \frac{1}{n(3+(-1)^n)}$ .

(i) Δείξτε ότι

$$a_{2k-1} - a_{2k} > \frac{1}{8k}, \quad a_{2k+1} - a_{2k} > \frac{1}{4k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(ii) Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ . (Υποδ. Μελετήστε τη ακολουθία μερικών αθροισμάτων)

4) (i) Δίδεται ότι η ακολουθία  $\{a_n\}$ , ( $a_n \in \mathbf{R}$ ), τείνει στο μηδέν. Δείξτε ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει αν και μόνο εάν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} + a_{2n+1})$ , συγκλίνει.

(ii) Έστω

$$a_n = \frac{(-1)^n \sin(\ln n)}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Δείξτε ότι υπάρχει θετική σταθερά  $C$  τ.ω.

$$|a_{2n} + a_{2n+1}| \leq Cn^{-2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(iii) Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .