



Πέμπτη 02 Δεκεμβρίου 2021

Σ. Φίλιππας

ΑΝΑΛΥΣΗ Ι τμ. Β

Φυλλάδιο 9

1) Έστω  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  η συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{Q} \\ \sin |x|, & x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Βρείτε, με απόδειξη, σε ποια σημεία η  $f$  είναι συνεχής και σε ποια ασυνεχής.

2) Έστω  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  συνεχής συνάρτησης, τ.ω.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Δείξτε ότι η  $f$  λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

3) Έστω  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  συνεχής και φθίνουσα και  $A \subset \mathbf{R}$  φραγμένο σύνολο. Δείξτε ότι

$$\inf f(A) \leq f(\sup A).$$

4) Έστω  $f, g$  συνεχείς συναρτήσεις στο  $(a, b)$ . Δείξτε ότι

(i) Η  $|f|$  είναι συνεχής.

(ii) Η  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ ,  $x \in (a, b)$  είναι συνεχής.

5) Μελετήστε τις λυμένες ασκήσεις 4.7, 4.13, 4.27 (δεν χρειάζεται να παραδώσετε κάτι).