05/10/2021

Διάλεξη 1η

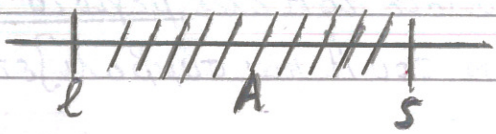
Αξίωμα πληρότητας

Ορισμός

Το $A \subset \mathbb{R}$ είναι **άνω φραγμένο** αν $\exists s \in \mathbb{R}$ τ.ω $a \leq s \ \forall a \in A$.

Το $A \subset \mathbb{R}$ είναι **κάτω φραγμένο** αν $\exists l \in \mathbb{R}$ τ.ω $a \geq l \ \forall a \in A$.

Αν το A είναι άνω και κάτω φραγμένο τότε λέμε ότι είναι φραγμένο



- Το s και το l δεν είναι απαραίτητο να ανήκουν στο σύνολο
- Το s λέγεται πάνω φράγμα
- Το l λέγεται κάτω φράγμα

παραδείγματα

$A = \left\{ \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N} \right\}$ κάτω φράγμα το: $0, -1, -150, \ldots$
άνω φράγμα το: $1, 2, 162, \ldots$

Ιδιότητα/Λήμμα

Το $A \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένο ανν $\exists c > 0$ τ.ω $|a| < c \ \forall a \in A$.

Απόδειξη

i) Έστω ότι $|a| < c \iff -c < a < c$, οπότε για $l = -c$ και $s = c$
Έχω ότι A φραγμένο.

ii) Έστω A φραγμένο άρα $l \leq a \leq s \ \forall a \in A$.
$a \leq s \leq |s| \leq \max\{|s|, |l|\}$
$a \geq l \geq -|l| \geq -\max\{|s|, |l|\} \iff (|l| \leq \max\{|s|, |l|\})$
δηλ $-\max\{|s|, |l|\} \leq a \leq \max\{|s|, |l|\}$ το ονομάζω c

$-c \leq a \leq c \iff |a| < c$

(Αξίωμα πληρότητας):

- Έστω $A \subset \mathbb{R}$ άνω φραγμένο. Τότε το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα το οποίο ονομάζεται supremum του A και συμβολίζεται $\sup A$

αν όχι άνω φραγμένο τότε λέμε ότι $\sup A = +\infty$

- Έστω $A \subset \mathbb{R}$ κάτω φραγμένο. Τότε το A έχει μέγιστο κάτω φράγμα το οποίο ονομάζεται infimum του A και συμβολίζεται $\inf A$

αν όχι κάτω φραγμένο, τότε λέμε ότι $\inf A = -\infty$.

Παραδείγματα

1) $A_1 = (0,1)$, $\sup A_1 = 1 \notin A_1$ / $\inf A_1 = 0 \notin A_1$

Το A_1 δεν έχει max

2) $A_2 = (0,1]$, $\sup A_2 = 1 \in A_2$
$\inf A_2 = 0 \notin A_2$.

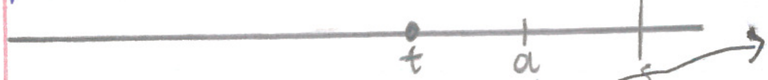
3) $A_3 = \{\frac{1}{m}, m = 1,2,3,\dots\}$, $\sup A_3 = 1$, $\inf A_3 = 0$.

Απόδειξη για το $\sup A_3$:

$\frac{1}{m} < 1 \iff m \geq 1$

Χαρακτηριστική ιδιότητα sup

Αν $A \subset \mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένο. Τότε το s είναι $s = \sup A$ ανν s άνω φράγμα και $\forall t < s$, $\exists\, a \in A$ τ.ω $t < a$.



υπάρχει σημείο του συνόλου.

Απόδειξη

i) Έστω $s = \sup A$. Αφού $t < s$ το t δεν είναι άνω φράγμα άρα $\exists a \in A$ με $a > t$

ii) Έστω s άνω φράγμα και $\forall t < s$, $\exists a \in A$ τ.ω $t < a$
Έστω ότι το s δεν είναι το $\sup A$ αλλά είναι το $s' < s$. Από την υπόθεση μας για $t = s'$ $\exists a \in A$ τ.ω $s' < a$ άρα s' δεν είναι καν άνω φράγμα

Άτοπο

- Αντίστοιχα για το inf

Αν $A \subset \mathbb{R}$ είναι κάτω φραγμένο. Τότε το ℓ είναι $\ell = \inf A$ ανν ℓ κάτω φράγμα και $\forall t > \ell$, $\exists a \in A$ τ.ω $t > a$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια με του supremum.

07/10/2021

Διάλεξη 2η

Ασκήσεις

1) Έστω $x < y + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ τότε για $x \leq y$

Απόδειξη

Έστω ότι $x > y$. Τότε $x - y > 0$
Για $\varepsilon = x - y > 0$ έχω ότι
$x < y + x - y = x$: ΑΤΟΠΟ!!!

Ασκ 2

Έστω $A, B \subset \mathbb{R}$ μη κενά, άνω φραγμένα
Θέτω

$A+B=\{a+b / a\in A, b\in B\}$

Δείξτε ότι $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$

Απόδειξη

Έστω $a\in A$, $b\in B$ τυχαία

$a\leq \sup A$, $b\leq \sup B \Rightarrow a+b\leq \sup A+\sup B$ → αριθμός

(άνω φράγμα για $A+B$ και $\sup(A+B)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα)

$\Rightarrow \sup(A+B)\leq \sup A+\sup B$ (1)

Έστω $\varepsilon>0$ τυχαίο. Τότε υπάρχουν $a\in A$, $b\in B$ τ.ω $a>\sup A-\varepsilon/2$, $b>\sup B-\varepsilon/2$ (από χαρακτηριστική ιδιοτ sup)

$\Rightarrow a+b>\sup A+\sup B-\varepsilon$

$\sup(A+B)\geq a+b>\sup A+\sup B-\varepsilon \Rightarrow \sup A+\sup B\leq \sup(A+B)+\varepsilon$

$\overset{A1}{\Longrightarrow} \sup A+\sup B\leq \sup(A+B)$ (2)

Από (1)+(2) $\Rightarrow \sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

Θεώρημα

Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο (!)

Απόδειξη

Έστω ότι είναι, και $s=\sup\mathbb{N}\in\mathbb{R}$. Από χαρακτηριστική ιδιότητα του sup υπάρχει n τ.ω

$n>s-1 \Leftrightarrow n+1>s$, άτοπο αφού $n+1\in\mathbb{N}$

Αρχιμήδεια ιδιότητα

$\forall \varepsilon>0, \exists n\in\mathbb{N}$ τ.ω $\frac{1}{n}<\varepsilon$

Απόδειξη

Γνωρίζω ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, μπορώ να βρω $n>\frac{1}{\varepsilon}$

$$n>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon$$

Ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού

Ορισμός

Είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος

Εστω $x \in \mathbb{R}$ $[x]$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος $\leq x$

π.χ

$[3]=3$, $[3.7]=3$

⚠ **Προσοχή στους αρνητικούς αριθμούς**

$[-2.8]=-3$.

Ιδιότητες

- $[x] \leq x \leq [x]+1$

Πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$.

Θεώρημα

Εστω $a,b \in \mathbb{R}$ $a<b$

Τότε $\exists q \in \mathbb{Q}$ τ.ω $a<q<b$.

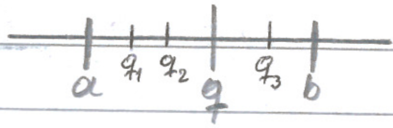
Απόδειξη

Από Αρχιμήδεια ιδιότητα έχω ότι $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω $\frac{1}{n} < b-a \iff$

$nb-na>1 \iff na+1<nb$

$na<[na]+1 \leq na+1<nb$

$\Rightarrow na<[na]+1<nb \Rightarrow a<\frac{[na]+1}{n}<b$ $\longrightarrow$ ακέραιος



Θεώρημα

Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος

Απόδειξη

Εστω ότι είναι ρητός τότε $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, όπου m,n πρώτοι μεταξύ τους

$m=\sqrt{2}\cdot n \Rightarrow m^2=2\cdot n^2$

$\Rightarrow m^2$ άρτιος $\Rightarrow m$ άρτιος δηλ $m=2k \Rightarrow 4k^2=2n^2 \Rightarrow n^2=2k^2 \Rightarrow n$ άρτιος

Άρα οι m,n δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους (και οι δύο άρτιοι)

Άτοπο

Θεώρημα

$\exists b \in \mathbb{R}$ τ.ω $b^2 = 2$ (δηλ $b = \sqrt{2}$)

Απόδειξη

Έστω το $A = \{x > 0 : x^2 < 2\}$, $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ (π.χ $1 \in A$) και άνω φραγμένο (π.χ $x < 4$)

Άρα $b = \sup A \in \mathbb{R}$.

Θα δείξω ότι $b^2 = 2$.

i) Έστω $b^2 < 2$. Θα δείξω ότι για $\varepsilon < 1$ κατάλληλα μικρό έχω ότι $(b+\varepsilon)^2 < 2$

$(b+\varepsilon)^2 = b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon^2 = b^2 + \varepsilon(2b+\varepsilon) < b^2 + \varepsilon(2b+1) < 2$

Θέλω $b^2 + \varepsilon(2b+1) < 2 \iff \varepsilon < \frac{2-b^2}{2b+1}$ $2-b^2 > 0$

Επειδή $(b+\varepsilon)^2 < 2 \Rightarrow b+\varepsilon \in A$

Όμως $b+\varepsilon > b = \sup A$. ΑΤΟΠΟ!

ii) Έστω $b^2 > 2$. Θα δείξω ότι για κατάλληλο $0 < \varepsilon < 1$, $(b-\varepsilon)^2 > 2$

$(b-\varepsilon)^2 = b^2 - 2\varepsilon b + \varepsilon^2 > b^2 - 2\varepsilon b > 2 \iff \frac{b^2-2}{2b} > \varepsilon > 0$

Από χαρακτηριστική ιδιότητα του sup έχω ότι $\exists x \in A$ τ.ω $x > (b-\varepsilon)$. Τότε όμως $x^2 > (b-\varepsilon)^2 > 2$. Άτοπο!

- Αφού το b^2 δεν μπορεί να είναι ούτε μεγαλύτερο, ούτε μικρότερο από το 2, τότε είναι ίσο με 2.

Γενικό Θεώρημα

Ύπαρξη n-οστής ρίζας.

Έστω $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε $\exists b > 0 \in \mathbb{R}$ τ.ω $b^n = \alpha$