14/12/2021

Διάλεξη 17η

Έχουμε δει: $f: A \to \mathbb{R}$ ομοιομ. συνεχής τότε αν (x_n) ακολουθία Cauchy $\Longrightarrow f(x_n)$ Cauchy (Π1).

Επίσης έχουμε δει: f ομοιομ συνεχής $\Longleftrightarrow \forall (x_n), (y_n)$ $x_n - y_n \to 0$, $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ (Π2)

Θεώρημα 1º

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f ομοιομ. συνεχής.

Απόδειξη.

Έστω ότι η f δεν είναι ομοιομ συνεχής. Τότε $\exists x_n, y_n$ τ.ω $x_n - y_n \to 0$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ (*) για κάποιο $\varepsilon > 0$. $x_n \in [a,b]$ άρα από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, $\exists (x_{k_n})$ τ.ω $x_{k_n} \to x \in [a,b]$

Όμως $x_{k_n} - y_{k_n} \to 0 \Rightarrow y_{k_n} \to x$. Επειδή f συνεχής $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f(y_{k_n}) \to f(x) \\ f(x_{k_n}) \to f(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(y_{k_n}) - f(x_{k_n}) \to 0$$

που αντιφάσκει την (*)

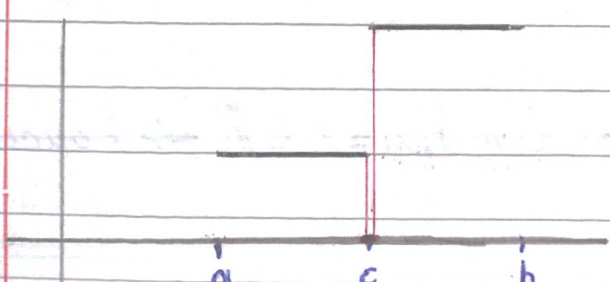
Παραδείγματα

Έστω $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, είναι συνεχής άρα ομοιομ. συνεχής.

Παρατήρηση

Προφανώς αν f ομοιομ. συνεχής στο A τότε είναι και ομοιομ συνεχής στο $B \subset A$

Για το Θεώρημα 1º πρέπει το $[a,b]$ να είναι διάστημα, όχι π.χ $[a,c) \cup (c,b]$.



π.χ η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,c) \\ 5, & x \in (c,b] \end{cases}$$

δεν είναι ομοιομ. συνεχής στο $[a,c) \cup (c,b]$

Θεώρημα 2:

Έστω $f:(\alpha,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής, (με $\alpha,b\in\mathbb{R}$). Η f είναι ομοιομ συνεχής ανν τα $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ και $\lim_{x\to b} f(x)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί.

Απόδειξη

($\Longleftarrow$)

Έστω τα όρια υπάρχουν. Ορίζω την $f^*:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f^*(x)=\begin{cases}\lim_{x\to\alpha} f(x) & \text{αν } x=\alpha\\ f(x) & \text{, αν } \alpha<x<b\\ \lim_{x\to b} f(x) & \text{, αν } x=b\end{cases}$$

Η f^* είναι συνεχής στο $[\alpha,b]$, άρα από θεώρημα 1 η f^* ομοιομ συνεχής άρα και η f ομοιομ συνεχής.

($\Longrightarrow$)

Έστω η f ομοιομ συνεχής στο (α,b). Θα δείξω ότι $x_n\to\alpha$ τότε $f(x_n)\to\ell$. Αφού $x_n\to\alpha$ είναι Cauchy $\xrightarrow{(\Pi_1)}$ $f(x_n)$ Cauchy $\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_n)\to\ell$ (δηλ σε κάποιο όριο). Έστω $y_n\to\alpha$ άλλη ακολουθία τότε $x_n-y_n\to 0 \xrightarrow{(\Pi_2)} f(x_n)-f(y_n)\to 0 \Rightarrow f(y_n)\to\ell$

Συνεπώς $\lim_{x\to\alpha} f(x)=\ell$. Ομοίως δείχνουμε ότι το $\lim_{x\to b} f(x)$ υπάρχει.

Παρατήρηση

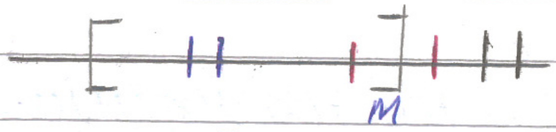
Αν η f ορίζεται στο (α,b) και είναι συνεχής, η ομοιομ συνέχεια είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η f να επεκτεινεται με συνεχή τρόπο στο $[\alpha,b]$

Ασκ. 5.3 από κ. Μήτση

Εστω $f:[\alpha,\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής και $\lim_{x\to\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ ομοιο συνεχης στο $[\alpha,\infty)$

Λύση

Λύση.



Έστω $\varepsilon>0$, τότε $\exists M>0$, τ.ω $|f(x)-\ell| < \frac{\varepsilon}{3}$, $x \geq M$. Επίσης η f είναι ομοιομ. συνεχής στο $[\alpha, M]$ (διότι είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο), άρα $\exists \delta>0$ τ.ω $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Διακρίνω 3 περιπτώσεις:

- $0 \leq x,y \leq M$. Τότε έχω $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$
- $\forall\, x,y \geq M$. Τότε $|f(x)-f(y)| = |f(x)-\ell+\ell-f(y)| \leq |f(x)-\ell| + |f(y)-\ell| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$
- $x \leq M \leq y$

Έστω $|x-y| \leq \delta$, άρα $|x-M| \leq \delta$ άρα $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Με το επιχείρημα τις (ii) έχω ότι $|f(y)-f(M)| < \frac{2\varepsilon}{3}$. Οπότε τελικά $|f(x)-f(y)| = |f(x)-f(M)+f(M)-f(y)| \leq |f(x)-f(M)| + |f(y)-f(M)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση έχουμε $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$, άρα η f ομοιομ. συνεχής.

π.χ

η $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in [0,\infty)$ και $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in [0,\infty)$ είναι ομ. συνεχής.

Παρόμοια

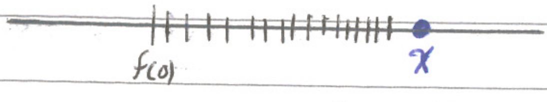
Αν $f:(-\infty,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell_2$ τότε f ομ. συνεχής στο $(-\infty,\infty)$.

ασκ: 5.10, κ. Μήτση

Έστω $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ ομοιομ. συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχουν $\alpha, b>0$ τ.ω $|f(x)| \leq \alpha x + b$ $\forall\, x \geq 0$.

Λύση.

Έστω $\varepsilon=1$, $\exists\, \delta_0$ τ.ω $|x-y| \leq \delta_0 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < 1$



Εστω $x \in [0,\infty)$ τυχαίο

Οπότε για $0<\delta<\delta_0$ παίρνω $f(x)=f(x)-f(x-\delta)+f(x-\delta)-\dots-f(0)+f(0)$

$$|f(x)| \le \underbrace{|f(x)-f(x_0-\delta)|+\dots+|\dots|+\dots+|f(x-n\delta)-f(0)|}_{n+1 \text{ το πλήθος}}+f(0) = n+f(0) \ (*)$$

Πόσα διαστήματα μήκους δ χώρανε;

Πρέπει να πάρω

$$\underbrace{n\delta \le x}_{} \le n\delta+1$$

$$\Downarrow$$

$$n \le \frac{x}{\delta}.$$

$$(*) \to |f(x)| \le \frac{x}{\delta}+1+|f(0)| = \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{a}x+\underbrace{(|f(0)|+1)}_{b}$$

16/12/2021

Διάλεξη 18η

Παράγωγος

Ορισμός

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

Γνωστά Θεωρήματα

→ Αν f παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο στο x_0, τότε η f είναι συνε

→ Αν f, g παραγωγίσιμες στο x_0, τότε οι $f+g$, $f\cdot g$ και $\frac{f}{g}$ $(g\neq 0)$ είναι παραγωγίσιμες στο x_0.

→ Θ.Μ.Τ: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο (a,b) τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

→ f παραγωγίσιμη και αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) ανν $f'\geq 0$ (αντίστοιχα $f'\leq 0$). Αν $f'>0$ (αντίστοιχα $f'<0$) τότε η f είναι γν. αύξουσα (αντίστοιχα γν. φθίνουσα). Το αντίστροφο δεν ισχύει

→ Αν η f παραγωγίσιμη σε κάποιο x_0 και το x_0 είναι σημείο τοπικού ακρότατου τότε $f'(x_0)=0$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

→ (Θεώρημα Taylor)

Αν η f είναι n-φορές παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα I, τότε $\forall a,b\in I$, $\exists\,\xi\in(a,b)$ τ.ω

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n.$$

Ασκ: 1

Η f παραγωγίσιμη στο a. Βρείτε το $\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$

Λύση.

$$\frac{xf(a)-af(a)+xf(x)-xf(x)}{x-a}$$

$$= \frac{-x(f(x)-f(\alpha)) + f(x)(x-\alpha)}{x-\alpha} = \frac{-x f(x) - f(\alpha)}{x-\alpha} + f(x) \xrightarrow[x \to \alpha]{}$$

$$\longrightarrow -\alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$$

L'Hopital

$$\frac{x f(\alpha) - \alpha f(x)}{x-\alpha} = f(\alpha) - \alpha f'(x) \xrightarrow[x \to \alpha]{} f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)$$

Λάθος διότι η f δεν γνωρίζουμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε μια γειτονιά του α (Απαίτηση από το Θεώρημα L'Hopital)

Απόδειξη ανισοτήτων με χρήση ιδιοτήτων παραγώγων

Ασκ: 2

$x \in \mathbb{R}$, $y > 0$. Δείξτε ότι: $xy \leq e^x + y(\ln y - 1)$

Λύση

Ορίζω $f(x) = e^x + y(\ln y - 1) - xy \geq 0$, για $y > 0$ σταθερό

$F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

$F(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$

$f'(x) = e^x - y$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - y = 0 \Rightarrow x = \ln y$

$f''(x) = e^x > 0$ άρα $x = \ln y$ σημείο ελαχίστου

Άρα έχω ότι $\forall x \in \mathbb{R}$ $F(x) \geq F(x_0)$

$F(x_0) = e^{x_0} + y(\ln y - 1) - x_0 y = e^{\ln y} + y\ln y - y - y\ln y = 0$

$y + \ln y - y - y \ln y = 0$

$0 = 0$

$\Rightarrow f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Ασκ: 3

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) > l > 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Λύση

Εφόσον $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \ell > 0$ τότε $\exists M>0$ τω όταν $x>M$, $f'(x) \geq \frac{\ell}{2}$

Κάνω Θ.Μ.Τ στο $[M, x]$ και έχω $\frac{f(x)-f(M)}{x-M} = \underbrace{f'(\xi x)}_{>\frac{\ell}{2}} \Rightarrow$

(όπου $M < \xi x < x$) $\Rightarrow \frac{f(x)-f(M)}{x-M} > \frac{\ell}{2} \Rightarrow f(x)-f(M) > \frac{\ell}{2}(x-M) \Rightarrow$
$f(x) > \frac{\ell}{2}(x-M)+f(M) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Θεώρημα Κανόνας αλυσίδας

Εστω $I, J \subset \mathbb{R}$ δυο ανοιχτά διαστήματα, και $f: I \to J \to \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις. Υποθέτω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$. Τότε η $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Σκέψη

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

και παίρνω όρια $x\to x_0$.

Πρόβλημα δεν έχω εξασφαλίση $f(x)\neq f(x_0)$!

δηλ μπορεί να μηδενιστή του πρώτου κλάσματος.

Απόδειξη

Ορίζω την συνάρτηση $G: J \to \mathbb{R}$

$$G(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}, & y\neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)), & y = f(x_0) \end{cases}$$

Η $G(y)$ είναι συνεχής στο x_0 και επιπλέον

$G(y)(y-f(x_0)) = g(y)-g(f(x_0))\ \forall y\in J$.

Οπότε:

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = G(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} G(f(x_0))f'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

Θεώρημα (Αντίστροφης απεικόνισης για παραγώγους)

Έστω $I, J \subset \mathbb{R}$ ανοικτά διαστήματα και $f: I \to J$ αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη, τ.ω η f' δεν μηδενίζεται πουθενά. Τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, και για κάθε $x_0 \in I$ έχω

$$f^{-1}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Απλή σκέψη.

$$y = f(x), \quad y_0 = f(x_0)$$

$$\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \quad \text{(με ενδιαφέρει από το πηλίκο)}$$

$$= \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \xrightarrow{x \to x_0} \frac{1}{f(x_0)}$$

Απόδειξη.

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}, & x \neq x_0 \\ \dfrac{1}{f'(x_0)}, & x = x_0 \end{cases}$$

Η $F(x)$ είναι συνεχής και η $f^{-1}: J \to I$ είναι επίσης συνεχής. Επομένως η $F(f^{-1}(y))$ είναι συνεχής και άρα

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(x_0)}{y - f(x_0)} = F(f^{-1}(y)) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ (y \to f(x_0))}]{} F(f^{-1}(f(x_0))) = F(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$