21/12/2021

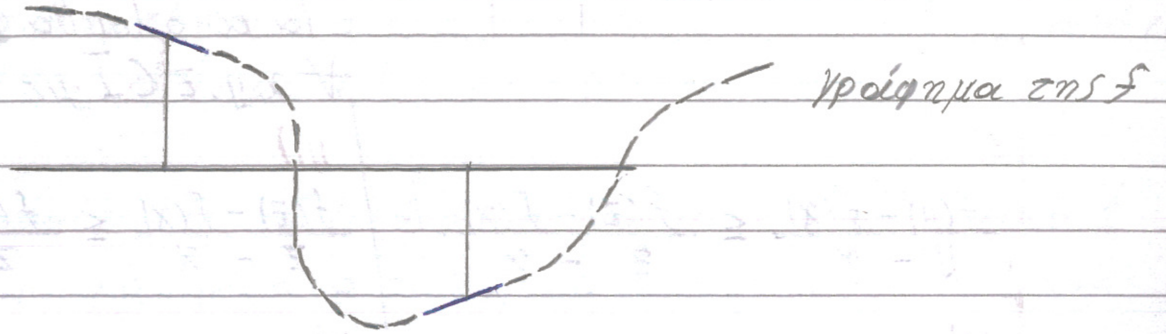
Διάλεξη 19η

Θεώρημα Darboux

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Τότε η f' έχει την ιδιότητα της μέσης τιμής, δηλαδή αν το ξ είναι ένας αριθμός ανάμεσα σε $f'(\alpha)$ και $f'(b)$, τότε υπάρχει x_0 ανάμεσα στα α και b, τ.ω $f'(x_0) = \xi$.

Απόδειξη

Θα δείξω ότι $f'(\alpha) \cdot f'(b) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (\alpha, b)$ τ.ω $f'(x_0) = 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $f'(\alpha) < 0$ και $f'(b) > 0$.



$[\alpha, b]$

$f'(\alpha) < 0$ δηλαδή $\lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < 0$ άρα $\exists \delta > 0$ τ.ω

$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < 0$ για $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$

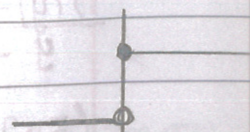
$f(x) < f(\alpha)$ για $x \in (\alpha, \alpha+\delta)$ άρα το α δεν είναι σημείο ελάχιστου της. Με παρόμοιο τρόπο το b δεν είναι σημείο ελαχίστου της f στο $[\alpha, b]$

Όμως η f έχει σημείο ελαχίστου, έστω $x_0 \in (\alpha, b)$ και $f'(x_0) = 0$

• Για την γενική περίπτωση εφαρμόζω το προηγούμενο αποτέλεσμα στην συνάρτηση $g'(x) = f'(x) - \xi$. Αν $g'(\alpha) \cdot g'(b) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (\alpha, b)$, $g'(x_0) = 0 \Longleftrightarrow f'(x_0) = \xi$

Εφαρμογή

Υπάρχει παραγωγίσιμη τ.ω $f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

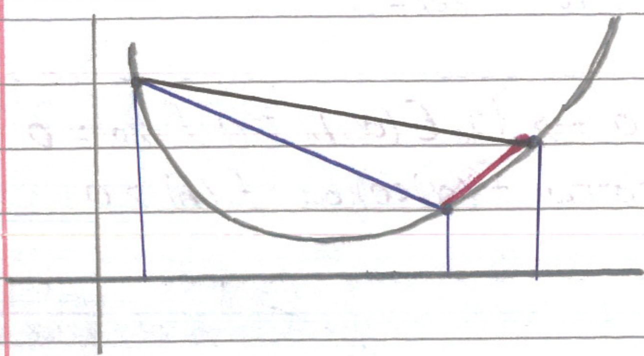


Λύση

π.χ για $\xi = \frac{1}{2} \in (0, 1)$ $\nexists$ τ.ω $f'(x_0) = \frac{1}{2}$ άρα δεν ικανοποιεί την

την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής. Άρα ∄ τέτοια συνάρτηση

Κυρτότητα



Θεώρημα

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα $\forall x, y, z \in I$ με $x<y<z$ έχω:

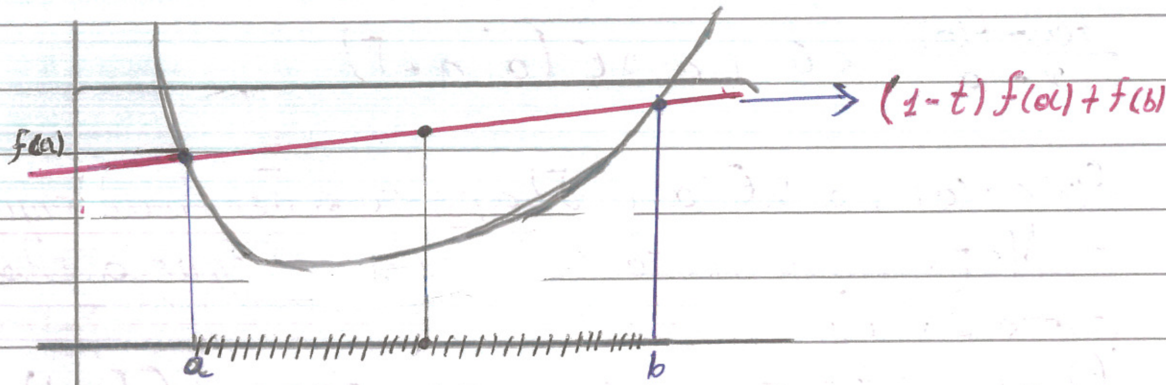
i)
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

ii)
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-x}$$

iii)
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

iv)
$$f((1-t)\cdot a+t\cdot b) \leq (1-t) f(a) + t f(b)$$
για $0 \leq t \leq 1$

iv)



Απόδειξη

Πράξεις. Θα δείξω (i)⟺(ii) (τα υπόλοιπά παρόμοια)

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \iff$$

$$(z-x)(f(y)-f(x)) \leq (y-x)(f(z)-f(x)) \xRightarrow{+x-x \text{ στο πρώτο}}$$

$$(f(y)-f(x))(z-x) + (f(y)-f(x))(x-y) \leq (f(z)-f(y))(y-x) \Longrightarrow$$

$$(f(y)-f(x))(z-x) \le (f(z)-f(y))(y-x) + (f(y)-f(x))(y-x) \iff$$
$$(f(y)-f(x))(z-x) \le (f(z)-f(x))(y-x) \iff$$
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \blacksquare$$

Αν αντιστρέψω όλες τις ανισότητες η συνάρτηση ονομάζεται κοίλη.

Ορισμός

Αν μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί οποιαδήποτε από τις συνθήκες (i) - (iv) (άρα όλες) ονομάζεται κυρτή.

η (iv) σημαίνει ότι: Η εικόνα του γραμμικού συνδυάσμου 2 σημείων μικρότερο από τον γραμμικό συνδυασμό των εικόνων.

Η (iv) γενικεύεται επαγωγικά. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ και $t_1+t_2+\ldots+t_n = 1$ με $t_i \ge 0$. Τότε:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

Άσκηση

Παρατηρώντας ότι η συνάρτηση $\ln x$, $x>0$ είναι κοίλη δείξτε την ανισότητα

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \quad (1), \quad x_i > 0$$

Λύση

$$Η\ (1) \iff \ln\left(\frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \ldots + \frac{1}{n}x_n\right) \ge \frac{1}{n}\ln(x_1 \cdots x_n) = \frac{1}{n}\ln x_1 \cdots \frac{1}{n}\ln x_n$$

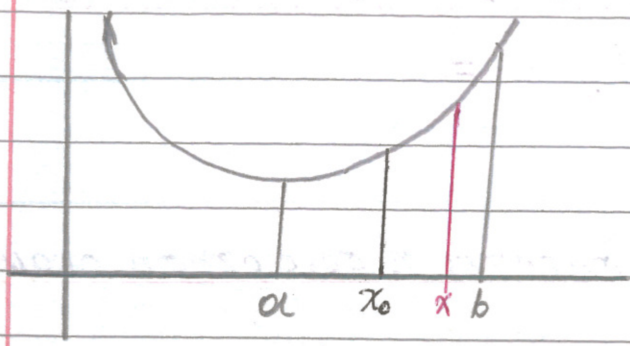
που είναι

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i), \quad με\ t_i = \frac{1}{n}.$$

Θεώρημα

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα, και $f: I \to \mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση. Τότε η f συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο του I

Απόδειξη.



Έστω x_0 τυχαίο εσωτερικό σημείο
Επιλέγω 2 τυχαία σημεία α, b τ.ω $\alpha < x_0 < b$.

Έστω $x \in (x_0, b)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \frac{f(b)-f(x_0)}{x-x_0} = M \text{ σταθ}$$

$\Rightarrow f(x)-f(x_0) \le M(x-x_0)$ (1)

Με παρόμοιο τρόπο

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge \frac{f(x_0)-f(\alpha)}{x_0-\alpha} = K \text{ σταθ.}$$

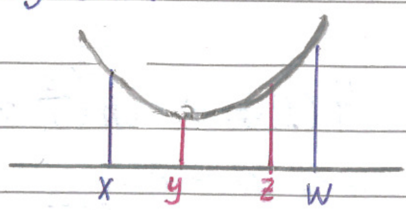
$\Longrightarrow f(x)-f(x_0) \ge K(x-x_0)$ (2)

Από (1), (2) $\Longrightarrow K(x-x_0) \le f(x)-f(x_0) \le M(x-x_0)$, όπου M, K σταθ.
Άρα για $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to f(x_0)$
Το ίδιο επιχείρημα όταν $x \in (\alpha, x_0)$

Θεώρημα.

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη.
Η f είναι κυρτή αν και μόνο αν η f' αύξουσα.

Απόδειξη.



Έστω f κυρτή και έστω $x < w$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$$

$$\downarrow$$

$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le f'(w)$ στη συνέχεια παίρνω το όριο $y \to x$

$$f'(x) \le f'(w)$$

Άρα f αύξουσα

Αντίστροφα

Έστω f' αύξουσα. Θα δείξω ότι f κυρτή. Έστω $x<y<z$.

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Από Θ.Μ.Τ $\exists\, \xi_1 \in (x,y)$ και $\xi_2 \in (y,z)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

$$f'(\xi_1)(y-x) \leq f'(\xi_2)(z-y).$$

Όμως $\xi_1 < \xi_2$ άρα $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$

Άσκηση

Αν f κυρτή και φραγμένη τότε f σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή. Τότε $\exists\, a, b$ τ.ω $f(a) \neq f(b)$

για $a<b<x$ τότε

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

$$\Rightarrow f(x)-f(b) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$$

Αν $f(b)>f(a)$ έχω αντίφαση διότι για $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to \infty$ <u>άτοπο</u>

Αν $f(b)<f(a)$ τότε επιλέγω $x<a<b$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(a)-f(x)}{a-x} = -M < 0$$

$$f(a)-f(x) \leq -M(a-x) \Longrightarrow f(x) \geq f(a) + M(a-x)$$

$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$ <u>άτοπο</u>