11/01/2022

Διάλεξη 20η

Ασκήσεις προόδου

ασκ: 2

i) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ (έχουμε $n+1$ όροι)

$\frac{1}{n}$: πιο μεγαλος στο άθροισμα

$\frac{1}{n+\sqrt{n}}$: πιο μικρός στο άθροισμα

Άρα $(n+1)\frac{1}{n+\sqrt{n}} \le a_n \le (n+1)\frac{1}{n}$

$$(n+1)\frac{1}{n+\sqrt{n}} = \frac{n+1}{n+\sqrt{n}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1$$

$$(n+1)\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \to 1$$

Από κριτήριο παρεμβολής

ii)

Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση και την απολυτη σύγκλιση τη $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$. (Είναι όπως στις σημειώσεις η $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}+(-1)^n}$)

Λύση

Προσοχή

Σκέφτομαι κρ. Dirichlet δηλ $\sum (-1)^n b_n$.

Θα πρέπει $0<b_n$ να είναι φθίνουσα (φθίνοντας στο 0).

Όμως η $b_n = \frac{1}{n+(-1)^n}$ δεν είναι φθίνουσα.

Για να είναι φθίνουσα θα πρέπει:

- $b_{2k} \ge b_{2k+1} \Longrightarrow \frac{1}{2k+1} \ge \frac{1}{2k}$ όχι !!!
- $b_{2k-1} \ge b_{2k} \Longrightarrow \frac{1}{2k-2} \ge \frac{1}{2k+1}$ για περιττους ΟΚ

Άρα δεν είναι μονότονη και έτσι δεν μπορούμε να εφαρμοσθεί το κρ. Dirichlet.

Εύκολος τρόπος λύσης:
Πολ/ζω με συζυγή παράσταση για να φυγούν τα $(-1)^n$

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n n - (-1)^n(-1)^n}{(n+(-1)^n)(n-(-1)^n)} = \frac{(-1)^n n}{n^2-1} - \frac{1}{n^2-1}$$

Αυτή η συνάρτηση είναι κατάλληλη για κρ. Dirichlet
Όμως $b_n = \frac{n}{n^2-1}$ είναι φθίνουσα;
Έστω $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

$$f'(x) = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} < 0$$

Άρα πράγματι $b_n \downarrow 0$.
Συνεπώς από Dirichlet συγκλίνει. Επίσης η $\sum \frac{1}{n^2-1}$ συγκλίνει (σύγκριση με $\sum \frac{1}{n^2}$) άρα και η αρχική

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} \text{ συγκλίνει}$$

Πρώτα ελέγχω απόλυτη σύγκλιση και μετά τα παραπάνω.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}\right| = \frac{1}{n+(-1)^n}$$

Προσοχή

Συγκρίνω με την $\frac{1}{n}$: $\frac{1/n}{1/(n+(-1)^n)} = \frac{n+(-1)^n}{n} \longrightarrow 1$.

Όμως η $\sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει, άρα και η $\sum \frac{1}{n+(-1)^n}$ αποκλίνει.
Συνεπώς δεν έχω απόλυτη σύγκλιση.

Θέμα 3ο:
$\limsup(a_n+b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$
a_n, b_n φραγμένες.

Λύση

Έστω n = σταθ και $\ell \geq n$. Τότε $a_\ell \leq \sup_{k\geq n} a_k$ και $b_\ell \leq \sup_{k\geq n} b_k$ τα προσθέτω κάτα μέλη και έχουμε

$$a_\ell + b_\ell \leq \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k$$

$$\Downarrow \ (n = \text{σταθ})$$

$$\sup_{\ell\geq n}(a_\ell+b_\ell) \leq \sup_{k\geq n} a_k + \sup_{k\geq n} b_k \quad (1)$$

Όλες οι ακολουθίες είναι φθίνουσες και φραγμένες, άρα συγκλίνουν καθώς $n \to +\infty$.

Άρα $\underset{\downarrow}{\sup_{\ell\geq n}(a_\ell+b_\ell)} \leq \underset{\downarrow}{\sup_{k\geq n} a_k} + \underset{\downarrow}{\sup_{k\geq n} b_k}$

$$\overline{\lim}(a_n+b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n$$

Προσοχή ⚠

$a_k \leq \limsup a_n \longrightarrow$ Λάθος εν γένει.

π.χ.1

$a_n = \frac{1}{n}$, $\limsup \frac{1}{n} = 0 = \liminf \frac{1}{n}$

Δηλ $a_k < \underline{\lim}\sup a_n$, $\forall\ k \geq 1$

είναι όριο και έχει ιδιότητες ορίων.

π.χ.2

$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow \liminf a_n = 0 = \limsup b_n$.

Ομοίως με π.χ.1

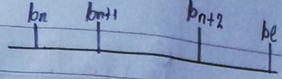
Ξέρω ότι $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_\ell, \dots$

$U_n = \sup_{k\geq n} a_k$

$$U_n \longrightarrow \overline{\lim}\, a_n$$

ii)

$$\overline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim}\,(a_n+b_n)$$



Έστω n = σταθ και $l \geq n \longrightarrow b_l \geq \inf_{k \geq n} b_k$

Προσθέτω το a_l και στα 2 μέλη: $b_l + a_l \geq \inf_{k\geq n} b_k + a_l$

Πρέπει να εμφανίσω $\sup a_n$, άρα λέω:

$$\sup_{l \geq n}(a_l + b_l) \geq a_l + b_l \geq \inf_{k\geq n} b_k + a_l$$

Μου λείπει ένα $\sup a_n$ στο δεξί μέλος. Θα απομονώσω το a_l που με ενοχλεί και θα αλλάξω τους δείκτες για να με βολεύει

$\Rightarrow a_l \leq \sup(a_k + b_k) - \inf b_k \Rightarrow \sup_{k\geq n} a_k \leq \sup(a_k + b_k) - \inf_{k \geq n} b_k.$

Τώρα πλέον έχω μονότονες ακολουθίες, άρα δικαιούμε να πάρω όρια. Παίρνω το όριο $n \to \infty$

$$\lim a_n \leq \lim(a_n + b_n) - \underline{\lim}\, b_n.$$

Ασκήσεις φυλλαδίων.

Φ8/2(i)

Για $\varepsilon > 0$, βρείτε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, τ.ω $|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(2)| < \varepsilon$, για $f(x) = x^4$.

Λύση.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας ψάχνω για $0 < \delta < \delta_0$, για κάποιο δ_0

$$|f(x) - f(2)| = |x^4 - 2^4| = |(x^2+2^2)(x^2-2^2)| = |(x^2+2^2)(x+2)| \cdot |x-2|$$

$|x-2| < \delta_0 \iff 2 - \delta_0 < x < 2 + \delta_0.$

Για $\delta_0 = 1$ θα έχουμε $1 < x < 3.$

άρα $x^2 + 2 < 13$ και $x + 2 < 5$

$|f(x) - f(2)| < 13 \cdot 5 \, |x-2| < \varepsilon$

Αρκεί λοιπόν $\delta = \frac{\varepsilon}{65}$. Οποιδήποτε μικρότερο είναι επίσης μια χαρά

Έχουμε πει $\delta \leq 1$.

Άρα τελικά παίρνω $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{65}, 1\right)$.