13/01/2022

Διάλεξη 21η

Ασκήσεις

Φυλλάδιο 8/ασκ: 4

Έστω $f: (-\alpha, \alpha) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.

i) $\lim_{x \to 0} f(x) = \ell$ αν $\lim_{x \to 0} f(x^3) = \ell$

Λύση

$\Rightarrow$ Έστω $\lim_{x \to 0} f(x) = \ell$ (1)

Έστω $\varepsilon > 0$. Από (1) έχω ότι $\exists\, \delta < 1$ τ.ω $|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.
Όμως $|x^3| < |x| < \delta$ άρα τελικά έχω ότι $|x| < \delta < 1 \Rightarrow$
$|f(x^3) - \ell| < \varepsilon$ άρα (από ορισμό ορίου) $\lim f(x^3) = \ell$

$\Leftarrow$ Έστω $\lim_{x \to 0} f(x^3) = \ell$ (2)

Έστω $\varepsilon > 0$. Απο (2) έχω ότι $\exists\, \delta < 1$ τ.ω $|x| < \delta \Rightarrow |f(x^3) - \ell| < \varepsilon$ (2')
Έστω y τ.ω $|y^{1/3}| < \delta$ ($\Leftrightarrow |y| < \delta^3$) τότε $|f(y) - \ell| < \varepsilon$. (απο (2') για $x = y^{1/3}$)
Άρα έχω ότι: $\forall\, y$ με $|y| < \delta^3 = \delta' \Rightarrow |f(y) - \ell| < \varepsilon$ που είναι ίσο με $\lim_{y \to 0} f(y) = \ell$.

ii) Μπορούμε να έχουμε $\lim_{x \to 0} f(x^2) = \ell$

Για το 2ο ερώτημα έστω $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Το $\lim_{x \to 0} f(x) \nexists$

$\lim f(x^2) = 1$

Άρα δεν μπορουμε.

φυλλάδιο 11/ασκ:3.

f παραγωγίσιμη στο 0 και $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(2x)+f(x)-2f(0)}{3x}$

Λύση

$$\frac{f(2x)+f(x)-2f(0)}{3x} = \frac{f(2x)-f(0)}{3x} + \frac{f(x)-f(0)}{3x} =$$

$$= \frac{2}{3}\underbrace{\frac{f(2x)-f(0)}{2x-0}}_{= f'(0)} + \frac{1}{3}\underbrace{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}_{= f'(0).} \to f'(0)$$

• άλλο παράδειγμα

$\lim \dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$

$$\frac{f(x)-f(-x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x} - \frac{f(-x)-f(0)}{x} \to 2f'(0).$$

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \to f'(0)$

$\dfrac{f(-x)-f(0)}{x} = \dfrac{f(-x)-f(0)}{-x-0} \to f'(0).$

φυλλάδιο 11/ασκ:5

$f(x) = [x]\sin^2(\pi x),\ x \in \mathbb{R}.$

Λύση

Στα διαστήματα $x \in [n, n+1]$, $[x] = n$ και η f είναι παραγωγ.

Άρα πρέπει να ελέγξουμε τα σημεία $x = n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$,

Έστω $x = n$ τότε $f(n) = n\sin^2(\pi n) = 0$. Ελέγχω

$\dfrac{f(x)-f(n)}{x-n}$ για $x \in (n, n+1)$ (1)

και

$\dfrac{f(x)-f(n)}{x-n}$ για $x \in (n-1, n)$ (2)

$$(1) \Longrightarrow \frac{n\sin^2(\pi x) - 0}{x-n} = \frac{n\sin^2(\pi x)}{x-n} \overset{DLH}{\Longrightarrow} \lim_{x\to n^+} 2n\pi\sin(\pi x)\cos(\pi x) = 0.$$

$$(2) \Longrightarrow \frac{(n-1)\sin^2(\pi x)}{x-n} = \lim_{x\to n^-} \frac{(n-1)\sin^2 \pi x}{x-n} \overset{DLH}{=}$$

$$\lim_{x\to n^-} 2\pi(n-1)\sin^2(\pi x)\cos(\pi x) = 0.$$

Άρα $f(x)$ παραγωγίσιμη $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση στην άσκηση

Για $x \in (n, n+1)$

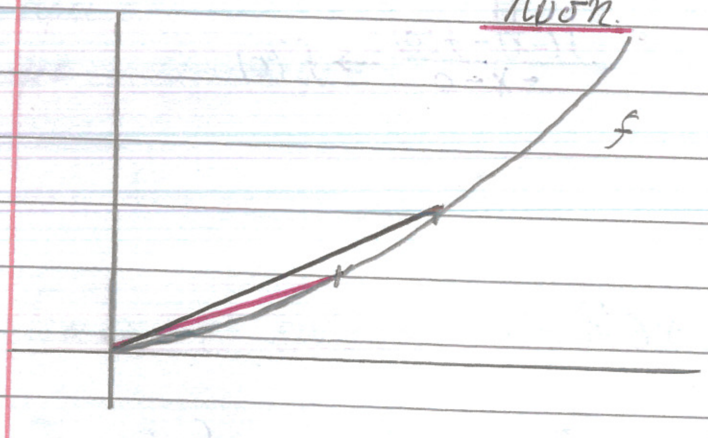
$f(x) = n\sin(\pi x)$, $f'(x) = 2n\pi\sin(\pi x)\cos(\pi x)$

$f'(x) = \pi[x]\sin(2\pi x)$.

φυλλάδιο 12 / ασκ: 4

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \uparrow$ στο $(0, +\infty)$

Λύση.



Έστω $0 < x < y$ τυχαία σημεία

Θ.Δ.Ο $\frac{f(x)}{x} < \frac{f(y)}{y}$ (1)

Λόγω κυρτότητας έχω

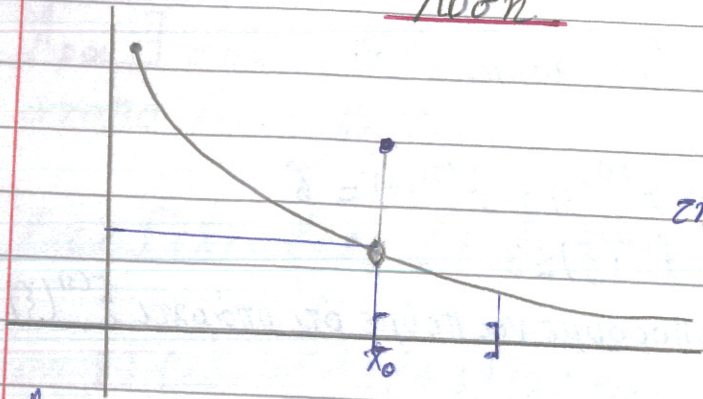
$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} < \frac{f(y) - f(\xi)}{y - \xi}, \quad \xi > 0.$$

παίρνω το όριο $\xi \to 0^+$ άρα καταλήγουμε $\frac{f(x)}{x} < \frac{f(y)}{y}$.

φυλλάδιο 12/ασκ: 1

$f:(\alpha,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και έχω $x_0\in(\alpha,b)$. Αν $\lim_{x\to x_0} f'(x)=\ell$, τότε f' συνεχής στο x_0.

Λύση



Από Θ. Darboux η f' έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής

Αν $x\in(\gamma,\delta)$ και ξ αναμεσα στα $f'(\gamma)$ και $f'(\delta)$ τότε $\exists\,\bar{x}\in(\gamma,\delta)$ τ.ω $f'(\bar{x})=\xi$

Εστω το διάστημα $[x_0, x_0+\varepsilon]$ για μικρό $\varepsilon>0$ $f'(x_0)>\ell$ και $f'(x_0+\varepsilon)$ πολυ κοντά στο ℓ., από ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής μεταξύ $f'(x_0)$ και ℓ όταν $x\in[x_0, x_0+\varepsilon]$. Άτοπο

Γιατί για ε μικρό $|f(x)-\ell|<\varepsilon'$, για οποιοδήποτε μικρο ε'.

14/01/2022

Ασκήσεις

φυλλάδιο 12/ασκ: 5

$f(-1)=f(0)=f'(0)=0$, $f(1)=1 \Longrightarrow \exists\,\xi\in(0,1)$ τ.ω $f^{(3)}(\xi)\leq 3$

Λύση

Στο $(0,1)$: $f(1)=f(0)+f'(0)\cdot 1+\frac{f''(0)}{2}\cdot 1^2+\frac{f'''(s)}{6}\cdot 1^3$ (1)
(εφαρμόζω Taylor στο $(0,1)$)

Στο $(-1,0)$: $f(-1)=f(0)+f'(0)(-1)+\frac{f''(0)}{2}(-1)^2+\frac{f'''(t)}{6}(-1)^3$ (2)

(1): $1 = \frac{1}{2} f''(0) + \frac{1}{6} f^{(3)}(s)$, για κάποιο $s \in (0,1)$.
(2): $0 = \frac{1}{2} f''(0) - \frac{1}{6} f^{(3)}(t)$, για κάποιο $t \in (-1,0)$

Αφαιρω κατα μέλη και θα έχουμε:

$$1 = \frac{1}{6}\left(f^{(3)}(s) + f^{(3)}(t)\right) \Rightarrow f^{(3)}(s) + f^{(3)}(t) = 6$$

Άρα $\exists\, \xi \in (-1,1)$ τ.ω $f^{(3)}(\xi) \leq 3$.
Με το ίδιο επιχείρημα μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει $f^{(3)}(\xi) \geq 3$.

φυλλάδιο 10/ασκ: 1

$$\left.\begin{array}{l} f, g : I \to \mathbb{R},\ f^2(x) = g^2(x),\ \forall x \in I \Rightarrow f(x) = g(x)\ \forall x \in I \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ή \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad f(x) = -g(x)\ \forall x \in I \end{array}\right\} (*)$$

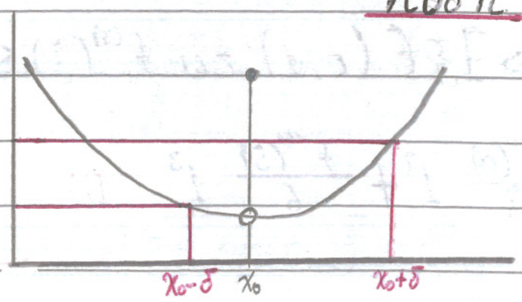
Λύση

Επειδή $f^2, g^2 > 0$, άρα η f και η g κρατάνε σταθερό πρόσημο.
Έστω ότι δεν ισχύει η $(*)$. Τότε $\exists\, x_1, x_2$ σημεία τ.ω $f(x_0) = g(x_0)$ και $f(x_1) = -g(x_1)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $g(x) > 0$.
Άρα $f(x_0) > 0$, $f(x_1) < 0$, άτοπο διότι και η f πρέπει να κρατάει πρόσημο.

φυλλαδιο 12/ασκ: 1

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, $\lim f'(x) = \ell \Rightarrow f'(x_0) = \ell$

Λύση



Έστω ότι $f'(x_0) > \ell$ (χωρίς βλάβη της γενικοτητας). Έστω $0 < \varepsilon < \frac{f'(x_0) - \ell}{3}$
Από τον ορισμό του ορίου $\exists\, \delta$ τ.ω
$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f'(x) - \ell| < \varepsilon$.

Εστω $\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, τότε έχω ότι $|f'(\xi) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow$
$$\ell - \varepsilon < f'(\xi) < \ell + \varepsilon.$$

Επίσης έχω ότι $f'(x_0) > \ell$. Εφαρμόζω θ. Darboux στο διάστημα $[\xi, x_0]$ (ή $[x_0, \xi]$ αν $\xi > x_0$).

Άρα $\exists$ σημείο $\bar{x} \in (\xi, x_0)$ τω $f'(\bar{x}) = \frac{\ell + f'(x_0)}{2}$ αυτό είναι άτοπο διότι πρέπει:

$$\ell - \varepsilon < f'(\bar{x}) < \ell + \varepsilon < \ell + \frac{f'(x_0) - \ell}{3} = \frac{f'(x_0) + 2\ell}{3} < \frac{\ell + f'(x_0)}{2} \iff$$

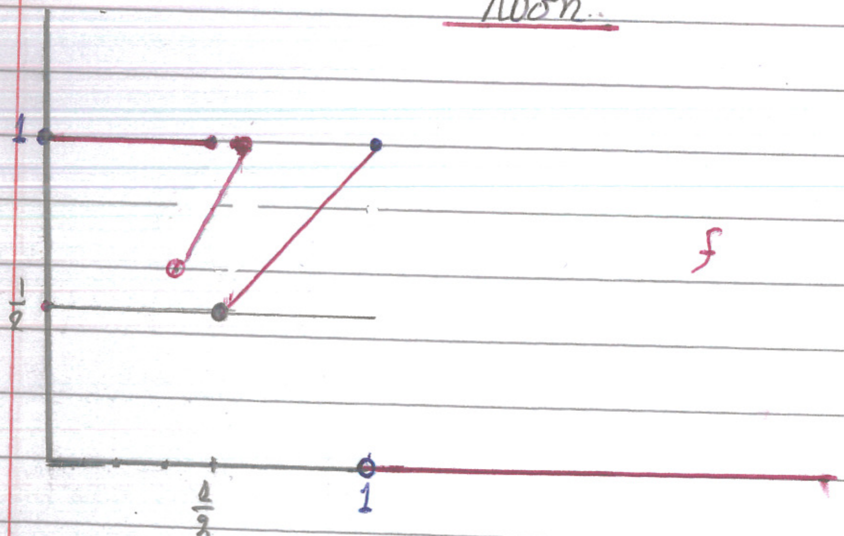
$$\iff 2f'(x_0) + 4\ell < 3\ell + 3f'(x_0) \iff \ell < f'(x_0)$$

Άσκηση

Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right], & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

Σχεδιάστε το γράφημα και εξετάστε την συνέχεια στο $x = 0$

Λύση



• Για $x > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 0$

Εύκολες τιμές $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, τότε $x_n\left[\frac{1}{x_n}\right] = \frac{1}{n}[n] = \frac{1}{n} \cdot n = 1$

Ελέγχω τι γίνεται όταν $\frac{1}{n+1} < x_n \leq \frac{1}{n} \iff n \leq \frac{1}{x} \leq n+1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = n$

Άρα για $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$, $f(x) = n \cdot x$

(Γνωστές ανισότητες για το ακέραιο μέρος)

$[\alpha] < \alpha < [\alpha]+1$

$$x\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{\left[\frac{1}{x}\right]}{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{1}{x} - 1 \leq \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} \xRightarrow{\text{διαιρώ με } \frac{1}{x}} 1 - x \leq \frac{\left[\frac{1}{x}\right]}{\frac{1}{x}} \leq 1$$

Για $x \to 0$, όλα πάνε στο 1

Άρα $\lim_{x \to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$.