12/10/2021 Διάλεξη 3η

Ακολουθίες πραγματικών Αριθμών

1 2 3 ... n ....

1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ ... $\frac{1}{n}$ ....

1 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ ... $\frac{1}{n^2}$ ....

2 $2+\frac{1}{2}$ $2+\frac{1}{3}$ .... $2+\frac{1}{n}$ ....

1 3 5 7 11 13 .....

2 4 6 ..... 2n ....

Ορισμός

Μια ακολουθία είναι μια συνάρτηση $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Ορισμός

Έστω x_n μια ακολουθία και $\ell \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι η x_n συγκλίνει στο ℓ αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω αν $n \geq n_0(\varepsilon)$ τότε

$$|x_n - \ell| < \varepsilon$$

Ο ℓ είναι το όριο τις ακολουθίας και το συμβολίζω: $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ ή $x_n \to \ell$, $n \to \infty$

Παραδείγματα

1) Έστω $x_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ δείξτε ότι ισχύει $|x_n - \ell| = \frac{1}{n}$

Λύση

Έστω $\varepsilon = 0,1$

$$\frac{1}{n} < 0,1 \Rightarrow n > 10$$

Για $n_0 = 11$, $\forall n \geq n_0$ προφανώς $\frac{1}{n} < 0,1$.

- Για $\varepsilon = 0,01$

$$\frac{1}{n} < 0,01 \Rightarrow n > 100$$

Για $n_0 = 101$, $\forall n \geq n_0$ προφανώς $\frac{1}{n} < 0,01$.

2)

Έστω $x_n = \frac{1}{n^2}$, $x_n = 1+\frac{1}{n^2}$

Λύση.

Διαισθητικά $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$

$\forall \varepsilon>0$ να βρω ένα $n_0(\varepsilon)$ τ.ω $|x_n-1|<\varepsilon$ αν $n\geq n_0(\varepsilon)$

$\frac{1}{n^2}<\varepsilon$

• Για $\varepsilon=0,2$

$\frac{1}{n^2}<0,2 \Rightarrow n^2>5 \Rightarrow n>\sqrt{5}$

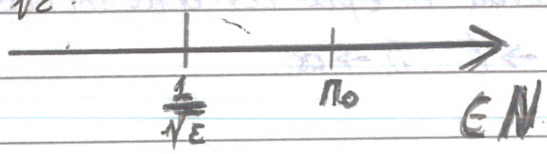
Παίρνω $n_0=3$, $\forall n\geq n_0$ προφανώς $\frac{1}{n^2}<0,2$.

• Για $\varepsilon=0,01$

$\frac{1}{n^2}<0,01 \iff n^2>100 \iff n>10$

Παίρνω $n_0=11$, $\forall n\geq n_0$ προφανώς $\frac{1}{n^2}<0,01$

$\frac{1}{n^2}<\varepsilon \iff n^2>\frac{1}{\varepsilon} \iff n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$



3)

Έστω $x_n=(-1)^n$

Λύση.

Η ακολουθία δεν συγκλίνει διότι οι όροι που παίρνει είναι:

$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

Απόδειξη.

Έστω ότι $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\ell$

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)$ τ.ω $|x_n-\ell|<\varepsilon\ \forall n\geq n_0(\varepsilon)$

$|x_{2n_0}-\ell|<\varepsilon \iff |1-\ell|<\varepsilon$

$|x_{2n+1}-\ell|<\varepsilon \iff |-1-\ell|<\varepsilon$.

$|1-\ell|<\varepsilon$ και $|1+\ell|<\varepsilon$ τα προσθέτω και έχουμε

$$2=1-\ell+1+\ell \leq |1-\ell|+|1+\ell|<2\varepsilon \Rightarrow 2<2\varepsilon \Rightarrow 1<\varepsilon$$ Άτοπο!!!

(π.χ αν πάρουμε $\varepsilon=\frac{1}{2}$ θα έχουμε $1<\frac{1}{2}$: Άτοπο!)

Θεώρημα Μοναδικότητας του ορίου

Έστω η x_n συγκλίνει στο ℓ_1 και στο ℓ_2 ($\lim_{n\to\infty} x_n=\ell_1$, $\lim_{n\to\infty} x_n=\ell_2$) τότε $\ell_1=\ell_2$.

Απόδειξη.

Έστω $\varepsilon>0$ τυχαίο

Τότε $\exists n_1$ τω $|x_n-\ell_1|<\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n\geq n_1$

Τότε $\exists n_2$ τω $|x_n-\ell_2|<\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n\geq n_2$

Παίρνω $n\geq \max\{n_1,n_2\}$

$$|\ell_1-\ell_2|=|\ell_1-x_n+x_n-\ell_2|\leq|\ell_1-x_n|+|x_n-\ell_2|<\varepsilon.$$

Άρα $|\ell_1-\ell_2|<\varepsilon$ $\forall \varepsilon>0 \Leftrightarrow \ell_1-\ell_2=0 \Leftrightarrow \ell_1=\ell_2$.

Θεώρημα

Αν η x_n συγκλίνει τότε είναι φραγμένη.

Απόδειξη.

$\exists n_0$ τ.ω $|x_n-\ell|<1$ $\forall n\geq n_0$

$-1<x_n-\ell<1 \Leftrightarrow \ell-1<x_n<1+\ell$ $\forall n\geq n_0$. $|x_n|<1+|\ell|$.

Παίρνω $c=\max\{|x_1|,|x_2|,\dots,|x_{n_0-1}|,1+|\ell|\}$

Προφανώς $|x_n|\leq c$ $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ φραγμένη.

Θεώρημα

Αν x_n συγκλίνει στο l, τότε η $|x_n|$ συγκλίνει το $|l|$.

⚠ Το αντίστροφο δεν ισχυεί π.χ $x_n = (-1)^n$

$|x_n| = 1$.

Απόδειξη.

$$||x_n|-|l|| \leq |x_n - l|$$

Σύμφωνα με τον ορισμό έχω.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon)$ τω $||x_n|-|l|| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0(\varepsilon)$.

Θεώρημα

Έστω $x_n \to l_1$, $y_n \to l_2$, τότε:

i) $\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = l_1 + l_2$

ii) $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = l_1 \cdot l_2$.

iii) $\lim_{n\to\infty} a \cdot x_n = a \cdot l, \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη.

i) Έστω τυχαίο $\varepsilon > 0$, εφόσον είναι συγκλίνουσα

$\exists n_1$ τ.ω $|x_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_1$

$\exists n_2$ τ.ω $|y_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_2$.

(Θέλουμε $|(x_n+y_n)-(l_1+l_2)|$ να είναι όσο ποιο γίνεται μικρό:)

$|x_n + y_n - (l_1+l_2)| \leq |x_n - l_1| + |y_n - l_2| \leq \varepsilon$.

Παίρνω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

Τότε

$\forall \varepsilon > 0 \ |(x_n+y_n)-(l_1+l_2)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.

ii)

Έστω $\frac{1}{n}$ φραγμένη ακολουθία

$|y_n| \leq M \ \forall n$

Έστω $\varepsilon > 0$ τυχαίο, εφόσον η ακολουθία είναι συγκλίνουσα θα έχω

$x_n \to \ell_1$, $\exists n_1$ τω $|x_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{|\ell_2| + M} \ \forall n \geq n_1$

$y_n \to \ell_2$, $\exists n_2$ τ.ω $|y_n - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{|\ell_1| + M} \ \forall n \geq n_2$.

Παίρνω $n_0 = max\{n_1, n_2\}$.

$|x_n \cdot y_n - \ell_1 \cdot \ell_2| = |x_n y_n - \ell_1 y_n + \ell_1 y_n - \ell_1 \ell_2| \leq |y_n| \cdot |x_n - \ell_1| + |\ell_1| \times |y_n - \ell_2| <$

$< M \cdot \frac{\varepsilon}{|\ell_2| + M} + |\ell_1| \frac{\varepsilon}{|\ell_1| + M} = \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.

Συνεπώς $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ τ.ω $|x_n y_n - \ell_1 \ell_2| < \varepsilon$ για $n \geq n_0$.

iii)

Έστω $a > 0$

Τότε $|x_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{a} \ \forall n \geq n_0$ συνεπώς $|a x_n - a \cdot \ell_1| < \varepsilon$ για $n \geq n_0$.

Έστω $x_n \to \ell_1$, $y_n \to \ell_2$ με $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. τότε

$a_1 x_n + a_2 y_n \longrightarrow a_1 \ell_1 + a_2 \cdot \ell_2$.

Θεώρημα

Έστω x_n μια ακολουθία μη μηδενικών αριθμών τ.ω $x_n \to \ell$, τότε

$\frac{1}{x} \to \frac{1}{\ell}$

Απόδειξη.

Έστω $|x_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$ για $\forall n \geq n_1$ για κάποιο n_1 έχω ότι:

$||x_n| - |\ell|| \leq |x_n - \ell|$ άρα

$||x_n| - |\ell|| \leq \frac{|\ell|}{2} \ \forall n \geq n_1$ συνεπώς

$||x_n| - |\ell|| \leq \varepsilon$

Όμως $-\frac{|\ell|}{2} < |x_n| - |\ell| < \frac{|\ell|}{2}$

$|x_n| > \frac{|\ell|}{2} \ \forall n \geq n_1$

Έστω $\varepsilon > 0$ τυχαίο, έχω ότι:

$|x_n - \ell| < \varepsilon \cdot \frac{\ell^2}{2}$ για $n \geq n_2$

Έστω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - x_n|}{|x_n| \cdot \ell} \leq \frac{\varepsilon \cdot \frac{\ell^2}{2}}{\frac{|\ell|}{2} \cdot |\ell|} = \frac{\frac{\varepsilon \ell^2}{2}}{\frac{\ell^2}{2}} = \varepsilon \ \forall \varepsilon \geq n_0$$

Από το προηγούμενο θεώρημα καταλήγουμε στο:

$y_n \to \ell_2 \Rightarrow \frac{1}{y} \to \frac{1}{\ell_2}$

$x_n \to \ell_1 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \frac{\ell_1}{\ell_2}$

Θεώρημα (Ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες)

Έστω έχω τρεις ακολουθίες x_n, y_n, z_n και

i) $x_n < y_n \leq z_n \ \forall n$

ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \ell$

Τότε $\lim_{n\to\infty} y_n = \ell$

Απόδειξη

$|x_n - \ell| < \varepsilon \ \forall n \geq n_1$

$|z_n - \ell| < \varepsilon \ \forall n \geq n_2$

Παίρνω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

$-\varepsilon < -|x - \ell| \leq x_n - \ell \leq y_n - \ell \leq z_n - \ell \leq |z_n - \ell| < \varepsilon$

Άρα

$|y_n - \ell| < \varepsilon$

Παράδειγμα

1) $\frac{\sin n}{n}$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Άρα $\frac{\sin n}{n} \to 0$.

Εφαρμογή

Έστω $\tilde{x}_n$ φραγμένη ακολουθία και $\tilde{y}_n \to 0$

$\exists M > 0$ τ.ω $|x_n| < M \ \forall n$.

τότε $\tilde{x}_n \cdot \tilde{y}_n \to 0$

$0 \leq |x_n \cdot y_n| \leq M |y_n|$

$x_n = 0$, $z_n = M|\tilde{y}_n|$, $y_n = \tilde{x}_n \cdot \tilde{y}_n$.

Παράδειγμα

Έστω a^n, $|a| < 1$, τότε

$\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

Λύση

Έστω $a \neq 0$ τότε $\frac{1}{|a|} > 1 \Rightarrow \exists \delta$ τ.ω $\frac{1}{|a|} = 1 + \delta$.

Έχω ότι

$$(1+\delta)^n > 1 + n\delta \geq n\delta$$

Οπότε

$$\left(\frac{1}{|a|}\right)^n = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta \geq n\delta.$$

$\Rightarrow 0 \leq |a|^n \leq \frac{1}{n\delta}$

Γνωρίζω ότι $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Άρα $|a|^n \to 0$.