19/10/2021 Διάλεξη 4η

2) Έστω $\alpha>0$, $\sqrt[n]{\alpha} \longrightarrow 1$

Απόδειξη

Έστω $\alpha>1$, $\sqrt[n]{\alpha} = 1+\theta_n \Rightarrow$ (όπου θ_n κάτι θετικό)

$\Rightarrow \alpha=(1+\theta_n)^n = 1+n\theta_n +$ θετικοί όροι $> 1+\theta_n \cdot n \Rightarrow$

$0<\theta_n<\frac{\alpha}{n} \Rightarrow \theta_n \longrightarrow 0$

$\frac{\alpha}{n} \downarrow 0$

Άρα $\sqrt[n]{\alpha} = 1+\theta_n \longrightarrow 1$

- Για $\alpha=1$ είναι προφανές ότι τείνει στο 1.

- Αν $\alpha<1$ τότε $\frac{1}{\alpha}>1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{\alpha}} \rightarrow 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\alpha} = \frac{1}{1}=1$
  (από το $0\leq x_n \rightarrow \ell \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{\ell}$).

3) $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$

Απόδειξη

$\sqrt[n]{n} = 1+\xi_n$, $n\geq 2$ με $\xi_n>0$

$\Rightarrow n=(1+\xi_n)^n = 1+n\xi_n+\frac{n(n-1)}{2}\xi_n^2+\ldots > \frac{n(n-1)}{2}\xi_n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \xi_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \longrightarrow 0$

Άρα και το $\xi_n^2 \rightarrow 0 \xrightarrow{\xi_n>0} \xi_n \rightarrow 0$

Συνεπώς $\sqrt[n]{n} = 1+\xi_n \rightarrow 1$

Ορισμός

1) Η (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$ ή τείνει στο $+\infty$ $x_n \rightarrow +\infty$ ή $\lim x_n = +\infty$
αν $\forall M>0$ $\exists n_0$ τ.ω $\forall n\geq n_0$, $x_n>M$.

2) Η (x_n) αποκλίνει στο $-\infty$ ή τείνει στο $-\infty$, $x_n \rightarrow -\infty$ ή $\lim x_n = -\infty$
αν $\forall M>0$ $\exists n_0$ τ.ω $\forall n\geq n_0$ $(x_n)<-M$.

(Την λέξη σύγκλιση τη χρησιμοποιούμε όταν το όριο της (x_n) είναι πραγματικός αριθμός).

Παραδείγματα

$x_n = n^2 \to +\infty$

$x_n = -n^3 \to -\infty$

$x_n = (-1)^n \cdot n$ δεν αποκλίνει ούτε στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$.

Θεώρημα Σύγκλισης

Αν $x_n \leq y_n$, τότε $x_n \to +\infty \Rightarrow y_n \to +\infty$ ενώ αν $y_n \to \infty \Rightarrow x_n \to -\infty$

Απόδειξη

Επειδή $x_n \to +\infty$

Έστω τυχαίο $M > 0$ $\exists n_0$ τ.ω $n \geq n_0 \Longrightarrow x_n \geq M$ όμως $y_n \geq x_n$ άρα $y_n \geq M$

Επομένως $y_n \to +\infty$.

*) Επίσης μπορούμε για να αποδείξουμε ότι κάποια ακολουθία τείνει σε $a \in \mathbb{R}$ ή $+\infty$ ή $-\infty$, μπορούμε να το δείξουμε και για κάποιο $n \geq n_0$, και μετά, δηλαδή δεν χρειάζεται να ισχύει για τους πρώτους όρους.

Μια ιδιότητα που ισχύει από έναν δεικτή και μετά λέμε ότι ισχύει τελικά

π.χ

$$x_n = \begin{cases} n & n \leq 100 \\ \frac{1}{n} & , n > 100 \end{cases} \quad , \quad y_n = \begin{cases} n^2 ; & n \leq 100 \\ \frac{1}{n^2} & , n > 100 \end{cases}$$

Άρα τελικά $x_n > y_n$ διότι $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$

Θεώρημα

$x_n \neq 0$ και $x_n \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$

$x_n \neq 0$ και $x_n \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$.

Απόδειξη

Έστω $x_n \to +\infty$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $x_n \to +\infty$ $\exists n_0$ τω για $n \geq n_0 \Rightarrow x_n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x_n} < \varepsilon$. Άρα $\frac{1}{x_n} \to 0$

Ακριβώς ίδια όταν $x_n \to -\infty$

Θεώρημα

1) $x_n \to 0$, τελικά $x_n > 0$ τότε $\frac{1}{x_n} \to +\infty$

2) $x_n \to 0$, τελικά $x_n < 0$ τότε $\frac{1}{x_n} \to -\infty$

Απόδειξη

1) Έστω $0 < x_n \to 0$.

Έστω τυχαίο $M > 0$, τότε επειδή $0 < x_n \to 0$ έχω ότι $\exists n_0$ τω για $n \geq n_0 \Rightarrow x_n < \frac{1}{M} \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} > M$

$\Rightarrow \frac{1}{x_n} \to +\infty$.

πχ

Όμως $x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$, $\frac{1}{x_n} = (-1)^n n \not\to \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$

Ορισμός

Η (x_n) είναι αύξουσα αν $x_{n+1} \geq x_n \ \forall n$, $x_n \uparrow$

Η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα αν $x_{n+1} > x_n$ $\Uparrow$

Αντίστοιχα ο ορισμός της φθίνουσας ακολουθίας.

Η (x_n) λέμε ότι είναι μονότονη αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα

Θεώρημα

Αν (x_n) αύξουσα και άνω φραγμένη τότε συγκλίνη.

Αν (x_n) φθίνουσα και κάτω φραγμένη τότε συγκλίνη

Απόδειξη.

Έστω $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Το A είναι άνω φραγμένο, άρα $\sup A = s \in \mathbb{R}$

Θα δείξω ότι $x_n \to s$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από χαρακτηριστική ιδιότητα του sup ότι

$\exists x_{m_0} \in A$ τω $x_{m_0} > s - \varepsilon$

Επειδή $x_n \uparrow$ έχω ότι $x_n > s - \varepsilon \ \forall n \geq m_0$

$$s - \varepsilon < x_n \leq s < s + \varepsilon \iff |x_n - s| < \varepsilon.$$

Άρα έχω ότι $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M_0$ τω $|x_n - s| < \varepsilon \ \forall n \geq m_0$ συνεπώς $x_n \to s$.

Θεώρημα

Αν x_n αύξουσα αλλά όχι άνω φραγμένη $x_n \to +\infty$.

Απόδειξη

Έστω $M > 0$ επειδή x_n όχι άνω φραγμένη $\exists n_0$ τω. $x_{n_0} > M$

Επειδή $x_n \uparrow$ $x_n > M \ \forall n \geq n_0$. Άρα από τον ορισμό $x_n \to +\infty$.

Θεώρημα

Έστω η ακολουθία $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και φραγμένη.

Απόδειξη

Ανισότητα Bernoulli

$(1+a)^n \geq 1 + n\cdot a$, $a \geq -1$, $n = 1,2,3,\ldots$

Η απόδειξη είναι απλή γίνεται με επαγωγή

21/10/2021

Διάλεξη 5η

Απόδειξη της $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και φραγμένη και άρα συγκλίνει

- $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$\left(\frac{\overbrace{n(n+2)}^{(n+1)^2-1=n^2+2n}}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \times \frac{n+1}{n}$$

Εφαρμόζω Bernoulli όπου $a = -\frac{1}{(n+1)^2}$

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \times \frac{n+1}{n} > \left(1-\cancel{(n+1)}\frac{1}{(n+1)^{\cancel{2}}}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$$

Άρα x_n είναι αύξουσα

- Η x_n είναι φραγμένη

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\overbrace{(n-k+1)(n-k+2)\cdots n}^{k\text{-όροι}}}{\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdots n}_{k\text{-όροι}}} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \overset{<1}{\overline{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}} \cdot \overset{<1}{\overline{\left(1 - \frac{k-2}{n}\right)}} \cdots \overset{<1}{\overline{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}} 1 < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < \rightarrow$$

όπου $k! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}_{k-1 \text{ όροι } = 2^{k-1}} > 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2$.

$$\Rightarrow \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Άρα

$$\rightarrow < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + 2 = 3.$$

Άρα και φραγμένη.

Άσκηση!!!

$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \underset{n+n}{\frac{1}{2n}}$. Δείξτε ότι συγκλίνει.

Λύση

- Ο πιο μεγάλος όρος είναι $\frac{1}{n+1}$, άρα

$$a_n < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

Άρα το a_n είναι φραγμένο.

- Κοιτάμε τώρα αν η a_n είναι μονότονη.

$$a_{n+1} - a_n = \underbrace{\cancel{\frac{1}{n+2}} + \cancel{\frac{1}{n+3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}}_{a_{n+1}} - \frac{1}{n+1} - \cancel{\frac{1}{n+2}} - \dots - \cancel{\frac{1}{2n}}$$

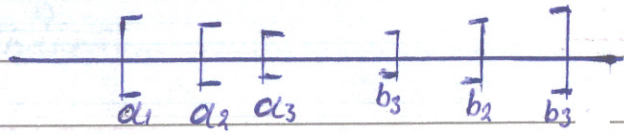
$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0.$$

Ο παρανομαστής $2n+2$ είναι ο πιο μεγάλος άρα το κλάσμα είναι πιο μικρό
Άρα $a_n \uparrow$.

Θεώρημα (Αρχή κιβωτισμού)

Έστω $[a_n, b_n]$ οικογένεια κλειστών διαστημάτων τω

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \text{ και } b_n - a_n \to 0$$



Τότε $\bigcap_{n-1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\ell\}$.

Απόδειξη

1) Θεωρώ την ακολουθία $(a_n)\uparrow$ και άνω φραγμένη $(a_n < b_n \leq b_1)$ άρα συγκλίνει: $a_n \to a$
2) Θεωρώ την ακολουθία $(b_n)\downarrow$ και κάτω φραγμένη $(b_n > a_1)$ άρα συγκλίνει: $b_n \to b$

$b_n - a_n \to 0$
Όμως επίσης $b - a = 0 \Rightarrow b = a = \ell$

- Θα δείξω ότι $\ell \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Επειδή $a_n \uparrow \ell$ $(b_n \downarrow \ell)$ έχω ότι $a_n \leq \ell \leq b_n \ \forall n = 1, 2, \dots$
$\Longleftrightarrow \ell \in [a_n, b_n] \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \ell \in \bigcap_{n-1}^{\infty} [a_n, b_n]$

- Θα δείξω ότι δεν υπάρχει άλλο σημείο στην τομή.
Έστω ότι υπάρχει το

$$x \in \bigcap_{n-1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

δηλ $a_n \leq \ell \leq b_n$

$$\begin{array}{ccc} a_n & & b_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & & \ell \end{array} \Rightarrow x = \ell$$

Άρα το ℓ είναι το μοναδικό στοιχείο

Παρατήρηση !!!

Το προηγούμενο αποτέλεσμα δεν ισχύει για ανοιχτά διαστήματα

π.χ

η $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$

Έστω ότι $\exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, \frac{1}{n})$ τότε $0 < x < \frac{1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N}$

παραβιάζει Αρχιμήδεια ιδιότητα.

Όμως $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$ (άλλα δεν συμβαίνει πάντα)

ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ορισμός

Έστω (x_n) ακολουθία και $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$, όπου $k_n \geq n$, άπειρη ακολουθία φυσικών αριθμών

Τότε η $y_n = x_{k_n}$ λέγεται υπακολουθία της x_n

$$\underset{k_1=1}{x_1}, x_2, x_3, \underset{k_2=4}{x_4}, x_5, \underset{k_3=6}{x_6}, \ldots, \underset{k_4=128}{x_{128}}$$