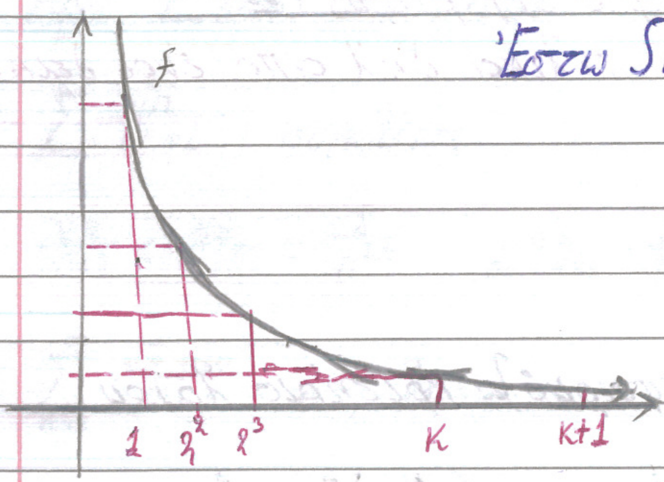
Σειρές με μη αρνητικούς όρους

Θεώρημα (Κριτήριο ολοκληρώματος)

Έστω $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}^+$ η οποία είναι συνεχής, φθίνουσα, και θετική τότε η $\sum_{n=1} f(n)$ συγκλίνει ανν

$x_n=\int_1^n f(x)dx$ συγκλίνει

Απόδειξη



Έστω $S_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)$ (η σύγκλιση της σειράς είναι ίσο με τη δύναμη της σύγκλισης της S_n)

$f(k+1)\le f(x)\le f_k$, $x\in[k,k+1]$ $\forall k=1,2,\dots$

Ολοκληρώνω

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dx \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le \int_k^{k+1} f(k)dx \Rightarrow$$

$$f(k+1)\le\int_k^{k+1} f(x)dx\le f(k) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} f(k+1)\le \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

$$S_{n+1}-f(1)\le \int_1^{n+1} f(x)dx \le S_n$$

$$\int_1^{n+1} f(x)dx = x_{n+1}$$

Δηλ $S_{n+1}-f(1)\le x_{n+1}\le S_n$

διότι $x_n\uparrow$ και $S_n\uparrow$

- Αν η σειρά (S_n) συγκλίνει τότε η S_n είναι φραγμένη. Άρα η x_n είναι φραγμένη, επομένως συγκλίνει διότι είναι αύξουσα.

- Αν η (x_n) συγκλίνει τότε είναι φραγμένη, άρα και η S_n είναι φραγμένη, επομένως συγκλίνει διότι είναι αύξουσα

Παραδείγματα

1) Η αρμονική σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Έστω $f(x)=\frac{1}{x}$, η $\sum \frac{1}{n}$ συγκλίνει ανν $\int_1^n \frac{1}{x}dx$ συγκλίνει

$$\int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n \to \infty$$

Άρα η $\sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει

2) $\sum \frac{1}{n^p}$, $p>0$

Έστω $f(x)=\frac{1}{x^p}$, η $\sum \frac{1}{n^p}$ ίδια συμπεριφορά με $\int_1^n \frac{1}{x^p}dx =$

$$= \frac{1}{-p+1} \cdot \frac{1}{x^{p-1}}\Big|_1^n = \frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right) \longrightarrow$$

- Αν $p>1$: $\frac{1}{p-1}<\infty$ άρα συγκλίνει.
- Αν $0<p<1$ τείνει στο ∞ άρα αποκλίνει.

Θεώρημα (Κριτήριο συμπύκνωσης Cauchy)

Έστω a_n μια φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ανν $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει

Απόδειξη

Έστω s_n, t_n οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των σειρών

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k, \quad t_n=\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$$

$$s_{2^{n+1}-1} = a_1 + \underbrace{(a_2+a_3)}_{\substack{2\text{-όροι} \\ \leq 2a_2}} + \underbrace{(a_4+a_5+a_6+a_7)}_{\substack{2^2 \text{ όροι} \\ \leq 2^2 a_{2^2}}} + \dots + \underbrace{(a_{2^n}+\dots+a_{2^{n+1}})}_{\substack{2^n \text{ όροι} \\ \leq 2^n a_{2^n}}}$$

$$\Longrightarrow s_{2^{n+1}-1} \leq t_n$$

Παίρνω

$$S_{2^{n+1}} = a_1 + a_2 + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{2\text{-όρος}} + \underbrace{(a_5 + \dots + a_8)}_{2^2 \text{ όρος}} + \dots + \underbrace{(a_{2^n} + \dots + a_{2^{n+1}-1})}_{2^n \text{ όρος}}$$

$$\geq a_1 + a_2 + 2a_{2^2} + 4a_{2^3} + \dots + 2^n a_{2^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2}(2a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \dots + 2^{n+1} a_{2^{n+1}}) = \frac{1}{2}(a_1 + t_{n+1})$$

Άρα $S_{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}(a_1 + t_{n+1})$.

Όπως πριν: Έστω t_n συγκλίνει, άρα φραγμένη, άρα $S_{2^{n+1}}$ φραγμένη $\Rightarrow S_n < S_{2^{n+1}}$ φραγμένη και αύξουσα άρα συγκλίνει.

Παραδείγματα

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$$

Γνωρίζω ότι $\frac{1}{(\ln n)^p} \geq \frac{1}{n^p}$ και ξέρουμε ότι για $p<1$ έχω απόκλιση

Ελέγχω την $\sum 2^n a_{2^n} = \sum \frac{2^n}{(\ln 2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^p (\ln 2)^p} =$

$\frac{1}{(\ln 2)^p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^p}$, κριτήριο ρίζας

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{2^n}{n^p}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^p} \to 2 > 1.$$ άρα η σειρά αποκλίνει $\forall p > 0$.

Σειρές όρων με αυθαίρετα πρόσημα

Ορισμός

Η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει απόλυτα, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

Θεώρημα

Αν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα. Τότε συγκλίνει

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 τ.ω $\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon \ \forall m > n \geq n_0$.
(επειδή είναι Cauchy)

άρα και

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$$

συνεπώς και η $\sum_{k=1}^{n} a_k$ είναι Cauchy άρα συγκλίνει.

Όμως!!!

Υπάρχουν σειρές $\sum a_n$ που συγκλίνει ενώ η $\sum |a_n|$ δεν συγκλίνει.
Τότε λέμε ότι η $\sum a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη

Παράδειγμα

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ή $\sum \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει

$$S_{2n} = \underbrace{1 - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}} =$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} <$$

$$< \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} < +\infty$$

Άρα συγκλίνει : $S_{2n} \to \ell$.

• Τώρα ελέγχω $S_{2n+1} = \underbrace{S_{2n}}_{\downarrow\, \ell} + \underbrace{a_{2n+1}}_{\downarrow\, 0} \to \ell$

Άρα $S_n \to \ell$ συγκλίνει.

Άρα η $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει υπό συνθήκη.