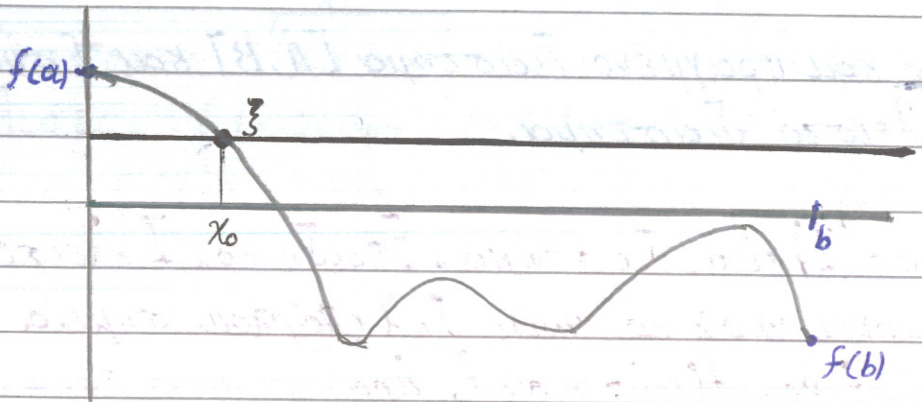
02/12/2021

Διάλεξη 14η

Είδαμε Θ. Bolzano: f συνεχής στο $[\alpha, b]$ / $f(\alpha)\cdot f(b)<0$ $\Rightarrow \exists x_0 \in (\alpha, b)$ τ.ω $f(x_0)=0$

Θεώρημα Ενδιαμεσης τιμής (ΘΕΤ)

Έστω $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Αν το ξ είναι ένας αριθμός ανάμεσα στα $f(\alpha)$ και $f(b)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, b)$ τ.ω $f(x_0)=\xi$

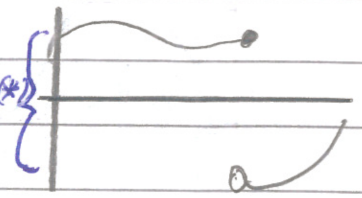


Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $f(\alpha)<\xi<f(b)$ και έστω $g(x)=f(x)-\xi$, η g είναι συνεχής και $g(\alpha)=f(\alpha)-\xi<0$ και παρόμοια $g(b)=f(b)-\xi>0$. Από Θ. Bolzano, $\exists x_0 \in (\alpha,b)$ τ.ω $g(x_0)=0 \iff f(x_0)=\xi$

Παρατηρήσεις

1) Στο ΘΕΤ, η συνέχεια είναι απαραίτητη: (*) $\nexists\, x$ τ.ω $f(x)=\xi$



2) Αν f συνεχής και I κάποιο διάστημα, τότε $f(I)$ είναι επίσης διάστημα.

Απόδειξη

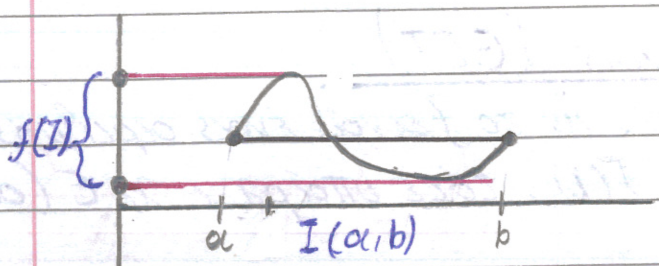
Έστω $x,y \in f(I)$, και έστω $x<y$ και έστω $x<z<y$

Θα δείξω ότι και $z \in f(I)$

Αν $x \in f(I) \Rightarrow f(\alpha)=x$ για κάποιο $\alpha \in I$ και παρόμοια $f(b)=y$ για

για κάποιο $b \in I$.

Από ΘΕΤ $\exists x_0 \; f(x_0) = z \Rightarrow z \in f(I)$



Αν $I = (\alpha, b)$
Εν γένει το $f(I)$ δεν είναι το διαστημα $(f(\alpha), f(b))$ εκτός εάν η f είναι αύξουσα

3) Αν I κλειστό και φραγμένο διάστημα $[A,B]$ και f συνεχής τότε $f(I)$ κλειστό διάστημα.

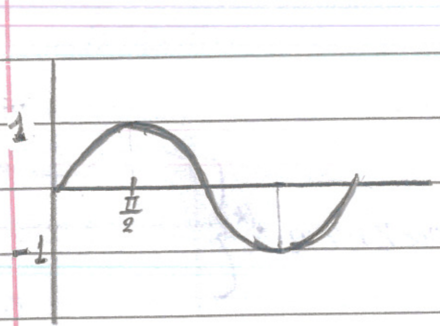
Απόδειξη

Από την (2) το $f(I)$ είναι διάστημα. Επειδή και I κλειστό και φραγμένο, παίρνει max και min, δηλ υπάρχουν σημεία x_m, x_M τ.ω $f(x_m) = \min f$ και $f(x_M) = \max f$. Άρα

$$f(I) = [f(x_m), f(x_M)]$$

4) Αν I ανοιχτό τότε $f(I)$ όχι απαραίτητα ανοιχτό.

π.χ



$f(x) = \sin x \;,\; x \in (0, 2\pi)$
$f(I) = [-1, 1]$

$f(x) = \sin x \,,\, x \in (0, \frac{\pi}{2}) \,,\, f(I) = (0, 1)$

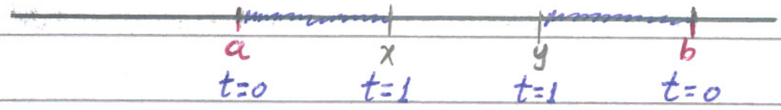
- Αν η f είναι μονότονη τότε $f(I)$ ανοιχτό.

Θεώρημα

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1, τότε η f είναι γνήσια μονότονη.

Απόδειξη

Έστω $a, b \in I$, με $a<b$ δυο σημεία και έστω $f(a)<f(b)$.
Θα δείξω ότι η f είναι γνήσια αύξουσα.
Έστω δυο τυχαία σημεία $x<y$. Έστω $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο
$g(t)=f((1-t)a+tx)-f((1-t)b+ty)$, $0\le t\le 1$



$g(0)=f(a)-f(b)$, $g(1)=f(x)-f(y)$

Έχω πάντα $\overbrace{(1-t)a}^{x_t}+tx < \overbrace{(1-t)b}^{y_t}+ty$, $\forall t\in[0,1]$
Διότι $(1-t)a<(1-t)b$ και $tx<ty$
Άρα $g(t)=f(x_t)-f(y_t)\neq 0$ (αφού f είναι 1-1
Συνεπώς η $g(t)$ δεν αλλάζει πρόσημο.
Αν η $g(t)$ άλλαζε πρόσημο θα είχα $g(t_1)>0$, $g(t_2)<0$ για $t_1\neq t_2$, $t_1, t_2\in[0,1]$. Τότε όμως από ΘΕΤ θα υπάρχει t_0 ανάμεσα στα t_1, t_2 τω $g(t_0)=0$ άτοπο!!!

Επειδή η $g(0)=f(a)-f(b)<0$ άρα και $g(1)=f(x)-f(y)<0$.
δηλ $f(y)>f(x)$. Επειδή $x<y$ τυχαία, άρα η f γν αύξουσα.

Ασκήσεις

Ασκ (4.2 Μήτσης)

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι T-περιοδική δηλ $f(x+T)=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Αν
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ (1)
τότε δείξτε ότι f σταθερή

Λύση

Από την (1) έχω ότι έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\exists M>0$ τ.ω $x>M$.
$|f(x)-\ell|<\varepsilon$
Έστω $y\in\mathbb{R}$ τυχαίο $f(y)=f(y+T)=f(y+2T)=\dots=f(y+k)$ $\forall k=1,2,3,\dots$
Για κατάλληλα μεγάλο k θα έχω $y+kT>M$ οπότε έχω
$$|f(y)-\ell|=|f(y+kT)-\ell|<\varepsilon.$$

Δηλ

$0 \le |f(y)-\ell| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow |f(y)-\ell| = 0 \Rightarrow f(y) = \ell$

Δηλ $f(x) = \ell, \forall x \in \mathbb{R}$

Άσκηση

$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, $\lim_{x \to +\infty} f = 10$ (1)

Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη

Λύση

$\exists M > 0$ τ.ω $x > M \Rightarrow |f(x) - 10| < 1 \Leftrightarrow -1 < f(x) < 10 \Rightarrow 9 < f(x) < 11$

$\Rightarrow |f(x)| < 11$ Δηλ για $x > M$, $|f(x)| < 11$

Όμως στο $[0, M]$ (κλειστό και φραγμένο) έχω μέγιστη τιμή

Έστω κ άρα $x \in [0, M] : f(x) \le k$

Συνεπώς $|f(x)| \le \max(k, 11)\ \forall x \in [0, \infty)$