Ανάλυση Ι (Κυρίμης Μπαρέβη) Τρίτη. 5/10/2021 ①

Αξίωμα Πληρότητας

$\mathbb{R}$: πραγματικοί

$\mathbb{N}$: φυσικοί αριθμοί $\{1, 2, ..\}$

$\mathbb{Z}$: ακεραιοι. $\{0, \pm 1, \pm 2, ..\}$

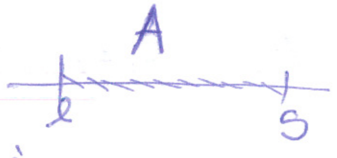
$\mathbb{Q}$: ρητοί $= \left\{ \frac{m}{n}, n \neq 0 \; m, n \in \mathbb{Z} \right\}$

άνω/πάνω φράγμα

Ορ Το $A \subset \mathbb{R}$. Είναι άνω φραγμένο αν $\exists s \in \mathbb{R}$. τ.ω $a \leq s$. $\forall a \in A$.

Το $A \in \mathbb{R}$ είναι κάτω φραγμένο αν $\exists l \in \mathbb{R}$ τ.ω. $a \geq l$ $\forall a \in A$.

κάτω φράγμα.



Αν A άνω κ' κάτω φραγμένο τότε λέμε ότι είναι φραγμένο.

πχ : $A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ ένα άνω φράγμα 1
ένα κάτω φράγμα 0

οποιοσδήποτε αρνητικός αριθμός είναι κάτω φράγμα του A
οποιοσδήποτε θετικός ≥ 1 είναι άνω φράγμα του A

κάτω φρ: $\{0, 1, -1, -150, ..\}$

άνω φρ: $\{1, 2, 162, ...\}$

Ιδιότητα/Λήμμα: Το $A \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένο ανν $\exists C > 0$. τ.ω. $|a| < C$. $\forall a \in A$

Απόδειξη: "⇒" Έστω ότι $|a| < c \Leftrightarrow -c < a < c$.
Οπότε για $l = -c$ κ' $s = c$. έχω ότι το A φραγμένο.

Επειδή έχω ανν πρέπει να δείξω κ' την άλλη κατεύθυνση.

"⇐" Έστω A φραγμένο., άρα $l \leq a \leq s$. $\forall a \in A$.

Έστω $a \leq s$. (εξ ορισμού) $\leq |s| \leq \max\{|s|, |l|\}$

και αντίστοιχα. $-\max\{|s|, |l|\} \leq -|l| \leq l \leq a$.

Άρα έχω ~~[illegible]~~ $\leq -\max\{|s|, |l|\} \leq -|l| \leq l \leq a \leq s \leq |s| \leq \max\{|s|, |l|\}$

$\Updownarrow$

$|l| \leq \max\{|s|, |l|\}$

Από $\underbrace{-\max\{|s|, |l|\}}_{\text{Θέτω } -C} \leq a \leq \underbrace{\max\{|s|, |l|\}}_{\text{Θέτω } C}$ $\forall a \in A$. $\Big\}$ $-C \leq a \leq C$

$\Updownarrow$

$\boxed{|a| < C}$

Αξίωμα Πληρωτητας (πλήτση):

- Έστω $A \subset \mathbb{R}$ άνω φραγμένο. Τότε το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα το οποίο ονομάζεται Supremum του A κ' συμβολίζεται SupA.
Αν A όχι άνω φραγμένο τότε λέμε ότι $\sup A = +\infty$.

- Έστω $A \subset \mathbb{R}$ κάτω φραγμένο τότε το A έχει μέγιστο κάτω φράγμα, το οποίο ονομάζεται infimum του A κ' συμβολίζεται infA.
Αν A όχι κάτω φραγμένο τότε λέμε ότι $\inf A = -\infty$

Πχ: $A_1 = (0,1)$ $\quad \sup A_1 = 1 \notin A_1$, $\inf A_1 = 0 \notin A_1$ $\quad$ Το A_1 δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο

$A_2 = (0,1]$ $\quad \sup A_2 = 1 \in A_2$, $\inf A_2 = 0 \notin A_2$.

$A_3 = \{\frac{1}{n}, n = 1,2,3,\dots\}$ $\quad \sup A_3 = 1$, $\inf A_3 = 0$

$$\frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow n \geq 1$$

Προσοχή! Sup κ' Inf υπάρχουν ΠΑΝΤΑ κ' μπορεί να μην ανήκουν στο σύνολ
max κ' min ΔΕΝ υπάρχουν ΠΑΝΤΑ

$\boxed{\Theta}$ (Χαρακτηριστική Ιδιότητα του Sup) inf

$A \subset \mathbb{R}$ είναι άνω κάτω φραγμένο. Τότε το $S \in \mathbb{R}$ $l \in \mathbb{R}$ είναι $S = \sup A$ $l = \inf A$. αν και μόνον εάν

l κάτω φράγμα

S άνω φράγμα κ' $\forall t < S$ $t > l$, $\exists \alpha \in A$ τω $t \overset{>}{<} \alpha$

Αλλά εάν σε ένα σύνολο A πάρω ένα $t < \sup A$ τότε θα υπάρχει στοιχείο του A (α) στο διάστημα $(t, \sup A)$

Απόδειξη: "⟹" Έστω $S = \sup A$. Αφού $t < s$ το t δεν είναι άνω φράγμα, άρα $\exists \alpha \in A$ με $\alpha > t$.

"⟸" Έστω S άνω φράγμα κ' $\forall t < s$, $\exists \alpha \in A$. τω $t < \alpha$.

Όταν θέλω νδ κάτι προφανές συνήθως πάω με άτοπο!

Έστω ότι το S δεν είναι $\sup A$, αλλά είναι το $S' < A$. Από την υπόθεσή μας για $t = S'$, $\exists\, \alpha \in A$ τ.ω $S' < \alpha$, άρα S' δεν είναι ~~κάτω~~ άνω φράγμα! Άτοπο ▼

Αντίστοιχα ορίζω για το infimum (με κόκκινο στον ορισμό)

Πέμπτη 7/10/2021

**** Άσκηση 1**

Έστω $x < y+\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, τότε $x \leq y$.

Απόδειξη: Θα το κάνω με άτοπο.

Έστω ότι $x > y$. Τότε $x-y > 0$

Για $\varepsilon = x-y > 0$ έχω ότι $x < y + x - y = x$ άτοπο!

Άσκηση 2

Έστω $A, B \subset \mathbb{R}$ μη κενά, άνω φραγμένα.

Θέτω $A+B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$

Δ.Ο. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

αριθμός

Απόδειξη: Έστω $\alpha \in A$, $b \in B$ τυχαία.

$\alpha \leq \sup A$ γ' $b \leq \sup B \longrightarrow \alpha + b \leq \sup A + \sup B \Longrightarrow$

Θέλω να $\Longrightarrow$ συμπεράνω. $\boxed{\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B}$ ① (αφού $\sup A + \sup B$ είναι άνω φράγμα για το $A+B$ γ' $\sup(A+B)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα)

Θα δείξω την ανάποδη ανισότητα $(\geq)$ για να συμπεράνω την ισότητα.

Έστω $\varepsilon > 0$ τυχαίο. Τότε υπάρχουν $\alpha \in A$, $b \in B$ τ.ω. $\alpha > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$, $b > \sup B - \varepsilon/2$

(από χαρακτηριστική ιδιότητα του Supremum)

Άρα $\alpha + b > \sup A + \sup B - \varepsilon$

αριθμός) στοιχείο του $\alpha + b$

Άρα $\sup(A+B) \geq \alpha + b > \sup A + \sup B - \varepsilon$.

~~Επομένως~~ $\longrightarrow \sup A + \sup B < \sup(A+B) + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$

Επομένως Από Άσκηση 1 $\longrightarrow \boxed{\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)}$ ②

Από ① + ② $\Rightarrow$ το ζητούμενο.

Θεώρημα: Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο!

Απόδειξη: Με άτοπο: Έστω ότι είναι φραγμένο γ' $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$

Άρα από χαρ. ιδιότητα του sup $\exists\, n$ τ.ω. $n > s - 1 \Leftrightarrow n+1 > s$.
Άτοπο!

ατοπο αφού $n+1 \in \mathbb{N}$

Θεώρημα Αρχιμήδεια Ιδιότητα:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Απόδειξη: Αφού $\mathbb{N}$ όχι φραγμένο, μπορώ να βρω $n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$
(Συνέπεια ότι το $\mathbb{N}$ όχι άνω φραγμένο)

Ορισμός (Ακέραιο Μέρος Πραγματικού αριθμού):
Έστω $x \in \mathbb{R}$ $[x]$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος $\le x$.

$$\boxed{[x] \le x < [x] + 1}$$

Πχ: $[3] = 3$, $[3,7] = 3$.

Προσοχή! στους αρνητικούς αριθμούς $[-2,8] = -3$.

Θεώρημα Πυκνότητα (Ρητών) του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$:
Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Τότε $\exists q \in \mathbb{Q}$ τ.ω. $a < q < b$

Απόδειξη: Από αρχιμήδεια Ιδιότητα έχω ότι $\exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\frac{1}{n} < \overset{\varepsilon}{\overset{\shortparallel}{\overbrace{b-a}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow nb - na > 1 \Leftrightarrow na + 1 < nb$

Όμως $[na] + 1 < na + 1 < nb$

Όμως $na < [na] + 1 \le na + 1 < nb$

$\Rightarrow na < [na] + 1 < nb$ αυτή η ανισότητα με ενδιαφέρει

$\Rightarrow a < \frac{\overset{\text{ακέραιος}}{[na]+1}}{n \text{ (φυσικός)}} < b$. $\frac{\text{ακέραιος}}{\text{φυσικός}}$ = ρητός.

Θεώρημα: Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη: Έστω ότι είναι ρητός, τότε $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, όπου m, n πρώτοι μεταξύ τους.

$m = \sqrt{2}\, n \Rightarrow m^2 = 2n^2$

$\Rightarrow m^2$ άρτιος. $\Rightarrow m$ άρτιος., δηλ $m = 2k$

(Το τετράγωνο άρτιου αριθμού είναι επίσης άρτιος)

$\Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n$ άρτιος.

Άρα m, n <u>όχι</u> πρώτοι μεταξύ τους, αφού και οι 2 άρτιοι! Άτοπο

Συνεπώς το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Θα ζητηθεί $\sqrt[3]{5}$

Θεώρημα: $\exists\, b \in \mathbb{R}$ τω $b^2 = 2$ (δηλ $b = \sqrt{2}$)

Απόδειξη: Έστω το $A = \{x > 0 : x^2 < 2\}$, $A \subset \mathbb{R}$

(μη κενό) $A \neq \emptyset$ (πχ $1 \in A$) κ' άνω φραγμένο. (Ένα άνω φράγμα πχ $x < 4$)

άρα $b = \sup A \in \mathbb{R}$ (γιατί μη κενό κ άνω φραγμένο σύνολο έχει sup)

Θα δ.ο. $b^2 = 2$. Θα το κάνω με άτοπο

(i) Έστω ότι $b^2 < 2$ Θα δείξω ότι για ε κατάλληλα μικρό. (έστω $\varepsilon < 1$)

έχω ότι $(b+\varepsilon)^2 < 2$

$\Rightarrow (b+\varepsilon)^2 = b^2 + 2\varepsilon b + \varepsilon^2 = b^2 + \varepsilon(2b+\varepsilon) < b^2 + \varepsilon(2b+1) < 2$

Θέλω $b^2 + \varepsilon(2b+1) < 2 \Rightarrow \boxed{\varepsilon < \frac{2-b^2}{2b+1}} > 0$

Επειδή $(b+\varepsilon)^2 < \varepsilon \Rightarrow b+\varepsilon \in A$.

Όμως $b+\varepsilon > b = \sup A$ Άτοπο!

(ii) Έστω $b^2 > 2$. Θδο. για κατάλληλο $0 < \varepsilon < 1$, $(b-\varepsilon)^2 > 2$,

$(b-\varepsilon)^2 = b^2 - 2\varepsilon b + \varepsilon^2 > b^2 - 2\varepsilon b \overset{?}{>} 2 \Rightarrow \boxed{\frac{b^2-2}{2b} > \varepsilon.}$

Από χαρακτηριστική ιδιότητα του sup έχω ότι $\exists\, x \in A$ τω $x > b - \varepsilon$. Τότε όμως $x^2 > (b-\varepsilon)^2 > 2$ Άτοπο!

Αφού b^2 όχι > 2 και b^2 όχι < 2, τότε $b^2 = 2$.

~~[illegible]~~

Ενικά

Έστω. $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ κ' $n \in \mathbb{N}$, τότε $\exists\, b > 0,\ b \in \mathbb{R}$ τ.ω $b^n = \alpha$

Ύπαρξη n-οστής ρίζας

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha > 0$ κ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists!\, r \in \mathbb{R}$ τ.ω $r^n = \alpha$. Το r αυτό λέγεται n-οστή ρίζα του α κ' συμβολίζεται με $\sqrt[n]{\alpha}$ ή $\alpha^{1/n}$