Άσκηση 1 Προόδου

$$A = \left\{ \frac{m-n}{m+n} , m,n = 1,2,\dots \right\}$$

$$-1 < \frac{m-n}{m+n} < 1 \Rightarrow -m-n < m-n < m+n.$$

Ισχυρίζομαι ότι $\sup A = 1$. πχ $n=1$, τότε $\frac{m-1}{m+1} \xrightarrow{m\to+\infty} 1$

Άρα για μεγάλα m πλησιάζω όσο θέλω ~~στο~~ 1.

Αλλιώς, / άλλοι τρόποι: Αν $\sup A < 1$ τότε έστω $\sup A = 1-\mu$, $\mu > 0$.
όμως επειδή $\frac{m-1}{m+1} \to 1$. $\exists\, m_0$ τω $\forall m \geq m_0$.

$$\left| \frac{m-1}{m+1} - 1 \right| < \frac{\mu}{2} \Rightarrow \frac{m-1}{m+1} > 1 - \frac{\mu}{2} \quad \text{Άτοπο.}$$

Ακριβώς το ίδιο $\inf A = -1$

Αν το A είχε max τότε $\max = \sup A = 1$ γ' $\exists\, m'$
τ.ω. $\frac{m'-n'}{m'+n'} = 1 \Rightarrow m'-n' = m+n \Rightarrow n' = -n' \Rightarrow n' = 0$.
Άτοπο!

άρα $\nexists \max A$ γ' παρόμοια $\nexists \min A$.

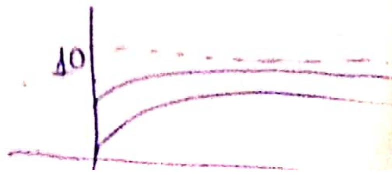
Άσκηση από προηγούμενη Πέμπτη

$f : [0,+\infty)$ συνεχής με $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 10$

(α) Η f φραγμένη

(β) Βρείτε f που δεν λαμβάνει μέγιστη τιμή

πχ: $-\frac{1}{x+1} + 10$



(δ) Μπορεί η f να μην έχει ούτε μέγιστη, ούτε ελάχιστη τιμή;

Έστω ότι f είναι τ.ω. στο $x_0 \in \mathbb{R}$ $f(x_0) > 10$, επειδή $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ $\exists M$ τ.ω για $x > M$, $f(x) < f(x_0)$

στο $(M, +\infty)$

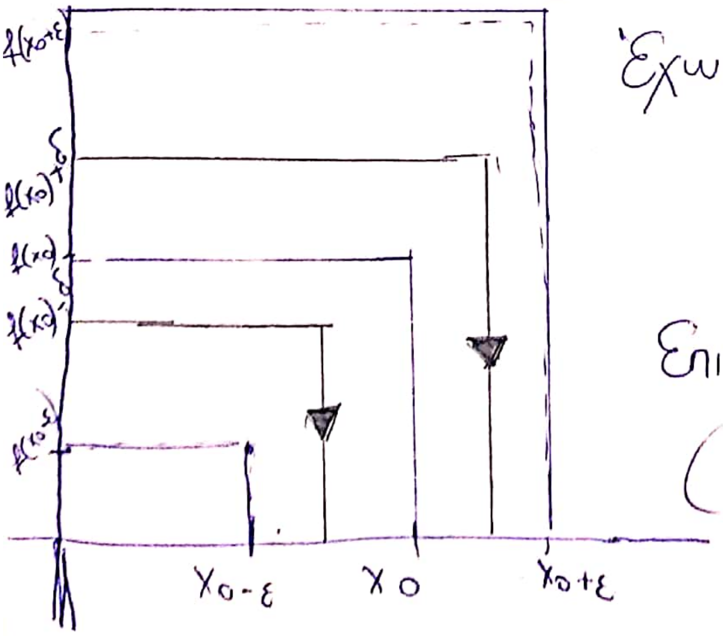
Στο $[0, M]$ η f έχει μέγιστη τιμή γ' $\max f(x) \geq f(x_0)$

Συνεπώς η f έχει μέγιστη τιμή στο $[0, +\infty)$

Θεώρημα Αντίστροφη Απεικόνιση

Έστω $f: I \to f(I)$, I διάστημα, συνεχής γ' 1-1.
Τότε η $f^{-1}: f(I) \to I$ είναι συνεχής

Απόδειξη: Για $I = \mathbb{R}$ η f είναι μονότονη, χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω f αύξουσα. Έστω $y_0 = f(x_0) \in f(I)$ και $\varepsilon > 0$ τυχαίο.



Έχω ότι $f((x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)) =$
$= (f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon))$

Επιλέγω $\delta > 0$ τ.ω.
$(f(x_0)-\delta, f(x_0)+\delta) \subset (f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon))$

Τότε έχω $f^{-1}\big(f(x_0)-\delta, f(x_0)+\delta\big) \subset f^{-1}\big(f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon)\big)$

$$= (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$$

Άρα έχουμε ότι $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ τ.ω.

$$f^{-1}\big(f(x_0)-\delta, f(x_0)+\delta\big) \subset (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$$

άρα αν $y_0 = f(x_0)$, τότε αν

$$y \in (y_0+\delta, y_0-\delta) \Longrightarrow f^{-1}(y) \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$$

$$\Updownarrow$$

$$\Longleftrightarrow |y-y_0|<\delta \rightarrow |f^{-1}(y)-x_0|<\varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow |y-y_0|<\delta \Longrightarrow |f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon$$

Άρα f^{-1} συνεχής στο $y_0 = f(x_0)$.

<u>Άσκηση</u>:

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μ' $f(x) = e^x + x^5$

(i) Δείξτε ότι f 1-1 μ' επί.

Λύση: $f'(x) = e^x + 4x^4 > 0$. άρα $\nearrow$ άρα 1-1.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ (1) \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ (2)$$

Έστω $z\in\mathbb{R}$ τυχαίο. Από (1) $\exists\, b\in\mathbb{R}$ τ.ω. $f(b)<z$.

Από (2) $\exists\, a\in\mathbb{R}$ τ.ω $f(a)<z$.

Από ΘΕΤ $\exists\, x_0 \in (a,b)$ τ.ω. $f(x_0)=z$.

(ii) Δ.ο. f^{-1} είναι συνεχής.

Λύση: Θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης.

(iii) Έστω η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τ.ω. $\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(e^{g(x)} + g^5(x)\right)}_{f(g(x))} = l \in \mathbb{R}$

Δ.ο. το $\lim_{x\to 0} g(x)$ υπάρχει

Λύση: Η f^{-1} είναι συνεχής στο. $x \to 0$ $f(g(x)) \to l$.

$$f^{-1}(f(g(x))) \Rightarrow \underset{x\to 0}{g(x)} \to f^{-1}(l)$$

Πέμπτη 9/12/2021.

Ομοιόμορφη Συνέχεια

$\boxed{\text{Ορισμός}}$: Η $f: A \subset \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A εάν $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$. τ.ω $\forall\, x, y \in A$ με $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Παρατήρηση:

- Η ομοιόμορφη συνέχεια είναι πιο ισχυρή από την απλή.
- Η ——— // ——— αναφέρεται σε χωρίο A. Δεν έχει νόημα να μιλάμε για ομοιόμορφη συνέχεια σε σημείο x_0.

πχ: $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Άρα για δοθέν $\varepsilon > 0$ θα βρω $\delta = \delta(\varepsilon)$. Διαλέγω $\varepsilon = \delta$ οπότε $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |x-y| < \delta = \varepsilon$

$\boxed{\text{Ορισμός}}$: Η f είναι Lipschitz συνεχής αν $\exists\, M > 0$ τω $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ $\forall\, x, y$ στο A_f

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$: Αν η f είναι Lipschitz συνεχής $\Rightarrow$ Ομοιόμορφα συνεχής

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Διαλέγω $\delta = \varepsilon/M$, οπότε όταν $|x-y| < \delta = \varepsilon/M \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M|x-y| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής

Πχ 1: $f(x) = x^p$, $0 < p \leq 1$, $x \in [1, +\infty)$

$f(x) f(y) = f'(\xi)(x-y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |p\xi^{p-1}||x-y| = p\xi^{p-1}|x-y|$

Εφαρμόσει ΘΜΤ. στο διάστημα (x, y)

$(\xi \geq 1 \Rightarrow \xi^{p-1} \leq 1)$

$|f(x) - f(y)| = p\xi^{p-1}|x-y| \leq p|x-y|$ άρα f Lipschitz. Άρα f ομοιόμορφα συνεχής)

Πχ 2: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1)$

$x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n+1}$, $(x_n), (y_n) \in (0,1)$

$x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$

$f(x_n) - f(y_n) = n - (n+1) = -1 \longrightarrow -1 \neq 0$

Άρα f όχι ομοιόμορφα συνεχής)

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$: Το άθροισμα, η διαφορά, ή η σύνθεση ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων, είναι ομοιόμορφα συνεχής

Προσοχή! Το γινόμενο ή πηλίκο ομοιόμορφα συνεχών δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής, $x_n \in A$, που είναι Cauchy. Τότε, η $f(x_n)$ επίσης Cauchy

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η f ομοιόμορφα συνεχής, $\exists \delta > 0$ τ.ω. $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Άρα x_n Cauchy, για $\delta > 0$ $\exists n_0$ τ.ω. $\forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \delta$. Άρα $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ $\forall m, n \geq n_0$. Άρα η $f(x_n)$ Cauchy

Παρατήρηση: Το παραπάνω Θεώρημα είναι χρήσιμο για νδο. κάποια f <u>δεν</u> είναι ομοιόμορφα συνεχής)

Πχ: $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$

Παίρνω για $x_n = \frac{1}{n\pi}$, x_n Cauchy διότι x_n συγκλίνει σε $l \in \mathbb{R}$

$\cos\frac{1}{x_n} = \cos(n\pi) = (-1)^n$ που δεν είναι Cauchy. Άρα η f όχι ομοιόμορφα συνεχής

Θεώρημα (Ακολουθιακός χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας)

Η $f: A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αννν $\forall (x_n),(y_n) \in A$, με $x_n - y_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

$\Longrightarrow f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Απόδειξη: "$\Rightarrow$" Έστω ότι f ομ. συνεχής

Έστω $(x_n),(y_n) \in A$ τω $x_n - y_n \to 0$ γ' έστω $\varepsilon > 0$.

Επειδή η f είναι ομ συν. $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ τω $|x-y| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Επειδή η διαφορά $x_n - y_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω $\forall n \geq n_0$. $|x_n - y_n| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$

Άρα $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$ για $n \geq n_0$.

Άρα $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

"$\Leftarrow$" Έστω ότι $x_n - y_n \to 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \to 0$

Θα πάω με άτοπο. Έστω ότι η f δεν είναι ομ. συν.

Άρα $\exists \varepsilon > 0$ $\forall \delta > 0$, $\exists x,y$, $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

Για το συγκεκριμένο $\varepsilon > 0$ γ' για $\delta = 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ έχω σημεία

$|x_1 - y_1| < 1$ $(\delta = 1)$

$|x_2 - y_2| < 1/2$ $(\delta = 1/2)$

$\vdots$

$|x_n - y_n| < 1/n$ $(\delta = 1/n)$

Άρα κατασκεύασα 2 ακολουθίες $(x_n),(y_n)$ τω $x_n - y_n \to 0$. Από υπόθεση πρέπει $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Όμως, έχω ότι $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Άτοπο!!!

Άρα η f ομοιόμορφα συνεχής

<u>Παρατήρηση</u>: Ο ακολουθιακός χαρακτηρισμός βοηθά για νδο κάποια συνάρτηση f δεν είναι ομ. συνεχής

Πχ: $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. (Όχι Lipschitz σε όλο το $\mathbb{R}$)

$y_n = n + \frac{1}{n}$, $x_n = n$. Παίρνω $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$

$f(x_n) - f(y_n) = n^2 + 2n\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - n^2 = \frac{1}{n^2} + 2 \to 2 \neq 0$

Άρα η f όχι ομ. συνεχής