Ανάλυση Ι Τρίτη 14/12/21

(Π1) Έχουμε δει: $f : A \to \mathbb{R}$ ομ. συνεχής, τότε αν x_n ακολ. Cauchy $\to f(x)$ Cauchy

(Π2) Επίσης έχουμε δει: f ομ. συνεχής $\iff \forall (x_n), (y_n)$ $x_n - y_n \to 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \to 0$

(*) **Θεώρημα 1**: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ Ομοιόμορφα συνεχής.

κλειστό κ' φραγμένο

Απόδειξη: Έστω f όχι ομ. συνεχής. Τότε υπάρχουν (x_n), (y_n) τ.ω. $x_n - y_n \to 0$ κ' $\boxed{|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon}$ (*) για κάποιο $\varepsilon > 0$.

$x_n \in [a,b]$ άρα από B-W. $\exists (x_{k_n})$ τ.ω. $x_{k_n} \to x \in [a,b]$

Όμως $x_{k_n} - y_{k_n} \to 0 \Rightarrow y_{k_n} \to x$. Επειδή f συνεχής

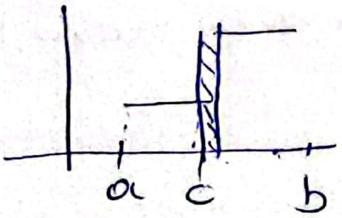
$$\left.\begin{array}{l} f(y_{k_n}) \to f(x) \\ f(x_{k_n}) \to f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(y_{k_n}) - f(x_{k_n}) \to 0$$ που αναιρεί την (*).

πχ: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in [0,1]$ $(0,1)$ είναι συνεχής, άρα κ' ομοιόμορφα συνεχής

ή x^3 ομοίως.

Προφανώς: Αν f ομ. συνεχής στο A τότε είναι κ' ομοιόμορφα συνεχής στο $B \subset A$.

Για Θεώρημα 1. πρέπει το $[a,b]$ να είναι διάστημα όχι πχ. $[a,c) \cup (c,b]$



η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,c) \\ 5, & x \in (c,b] \end{cases}$ δεν είναι ομ. συνεχής στο

Scanned with CamScanner

$\boxed{\text{Θεώρημα 2}}$: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής. Η ομοιόμορφα συνεχής $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\lim_{x\to a^+} f(x)\in\mathbb{R} \\ \lim_{x\to b^-} f(x)\in\mathbb{R}\end{cases}$ (1)

ανοιχτό γ' φραγμένο.
Διάστημα.

Απόδειξη: "$\Leftarrow$" Έστω ότι τα όρια (1) υπάρχουν. Ορίζω την f^*.
(Επέκταση της f για να εφαρμόσω το Θεώρημα 1)

$$f^* = \begin{cases}\lim_{x\to a^+} f(x), & x=a \\ f(x), & a<x<b \\ \lim_{x\to b^-} f(x), & x=b\end{cases}$$

Η f^* είναι συνεχής στο $[a,b]$ άρα από Θεώρημα 1, f^* ομ. συνεχής άρα ~~και~~ η f ομ. συνεχής

"$\Rightarrow$" Έστω f ομ. συνεχή στο (a,b) ΘΔο αν $x_n\to a$, τότε $f(x_n)\to l$.
Αφού $x_n\to a \Rightarrow (x_n)$ cauchy $\xrightarrow{(Π1)} f(x_n)$ Cauchy $\Rightarrow f(x_n)$ ~~Cauchy~~
$\Rightarrow f(x_n)\to l$, (δηλ. σε κάποιο όριο). Έστω $y_n\to a$ άλλη ακολουθία
Τότε $x_n-y_n\to 0 \xrightarrow{(Π2)} f(x_n)-f(y_n)\to 0 \Rightarrow f(y_n)\to l$
Συνεπώς $\lim_{x\to a^+} f(x)=l$. (απέδειξα ότι $\exists$ το $\lim_{x\to a^+} f(x)$)

Ομοίως για το δεξί άκρο. $\left(\lim_{x\to b^-} f(x)\in\mathbb{R}\right)$ //

<u>Παρατήρηση</u>
Αν ~~η~~ f ορίζεται στο (a,b) (ανοικτό) γ' είναι συνεχής, η ομ. συνέχεια είναι ικανή γ' αναγκαία συνθήκη ώστε η f να επεκτείνεται με συνεχή τρόπο, στο $[a,b]$ (κλειστό)
(Η ομ. συν. στα φραγμένα διαστ. είναι ~~ικανή~~ γ' αναγκαία συνθήκη για να την επεκτείνω.)

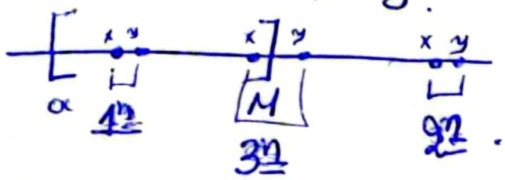
<u>Άσκηση 5.3</u> : Σημειώσεις Μήτση
$f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής γ' $\lim_{x\to\infty} f(x)=l\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ ομ. συνεχής στο $[a,+\infty)$
Λύση: Έστω $\varepsilon>0$, τότε $\exists M>0$ τ.ω. $|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{3}$ ε', $x\geq M$

Scanned with CamScanner

Επίσης η f είναι ομ. συνεχής στο $[\alpha, M]$ (διότι είναι συνεχής στο κλειστό κ' φραγμένο), άρα $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$,

άρα $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

Διακρίνω 3 περιπτώσεις:



(i) $\alpha \le x, y \le M$, τότε έχω $|x-y|<\delta \rightarrow |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$.

(ii) $x, y \ge M$, $|f(x)-f(y)| = |f(x)-\ell+\ell-f(y)| \le \underbrace{|f(x)-\ell|}_{<\varepsilon/3}+\underbrace{|f(y)-\ell|}_{<\varepsilon/3} < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$

Τριγωνική ανισότητα
(Μαγικές λέξεις)

(iii) $x \le M \le y$. Έστω $|x-y| \le \delta$ (το δ το έχω διαλέξει παραπάνω),
άρα $|x-M| \le \delta$ (είναι πολύ κοντά τα x,y κ' x,M)
άρα $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/3$.
Με το επιχείρημα του (ii) έχω ότι $|f(y)-f(M)| < 2\varepsilon/3$
Οπότε τελικά $|f(x)-f(y)| = |f(x)-f(M)+f(M)-f(y)| \le |f(x)-f(M)| + |f(x)-f(y)| < \varepsilon/3 + 2\varepsilon/3 < \varepsilon$.

Αν έχω όρια που υπάρχουν στο $\pm\infty$ μου εξασφαλίζει ομ συνέχεια

Πχ: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $[0,+\infty)$ ομ συν.

$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in [0,+\infty)$. ομ συνεχής (εφαρμόζεται κ' για ανοικτό διάστημα κ' για $(-\infty,+\infty)$)

Παρόμοια Άσκηση:

Αν $f: (-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής κ' $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ κ' $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$ τότε f ομ. συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$

Scanned with CamScanner

Άγραφοι κανόνες για ομοιόμορφη συνέχεια: Οπτικά δε θέλω η παράγωγος συνάρτησης να μεγαλώνει πολύ για να είναι ομ. συνεχής, εκτός εάν οι τιμές της πηγαίνουν στο 0.

Άσκηση 5.10. Μήτση:

$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ομ. συνεχής. Δ.ο. $\exists\, a, b > 0$ τ.ω. $|f(x)| \le ax + b \ \forall x \ge 0$.

(Δηλ για να είναι ομ. συνεχής η f στο $[0,\infty)$ θα πρέπει να μεγαλώνει το πολύ γραμμικά.
π.χ. η e^x, x^2 δεν είναι ομ. συν. στο $[0,\infty)$. Το αντίστροφο δεν ισχύει)

Λύση: Χρήση ορισμού: Έστω $\varepsilon = 1 > 0$. $\exists\, \delta_0$ τ.ω. $|x-y| \le \delta_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1$.

$f(x-n\delta)$ δ $f(0)$ x

Έστω $x \in [0,\infty)$ τυχαίο.

Οπότε: για $0 < \delta < \delta_0$. $f(x) \rightsquigarrow f(x) - f(x-\delta) + f(x-\delta) - f(x-2\delta) + \dots + f(x-n\delta) - f(0) + f(0)$

πόσα σημεία έχω παρεμβάλλει

$$|f(x)| \le \underbrace{\underset{\le 1}{|f(x)-f(x-\delta)|} + \underset{\le 1}{\dots} + \underset{\le 1}{|f(x-n\delta)-f(0)|}}_{n+1 \text{ στο πλήθος}} + |f(0)|$$

0 x

πόσα διαστήματα μήκους δ χωράνε; Δηλ Ποιο είναι το n; $\rightsquigarrow$ $n\delta \le x < n\delta + 1$

γιατί μπορεί να βγει δεκαδικός

$\Rightarrow$ Δηλ $\frac{x}{\delta}$ διαστήματα. $\rightsquigarrow n \le \frac{x}{\delta}$

$$\le \frac{x}{\delta} + 1 + |f(0)| = \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{a}x + \underbrace{(|f(0)|+1)}_{b}.$$

Scanned with CamScanner

$f: A \to \mathbb{R}$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=a}$

Γνωστά Θεωρήματα

- f παραγωγίσιμη στο $x_0 \Rightarrow f$ συνεχής στο x_0
- f, g παραγωγίσιμες στο $x_0 \to f+g, f-g, fg, f/g$ $(g \neq 0)$ παρ. στο x_0
- ΘΜΤ: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a,b]$, παρ. στο (a,b), τότε $\exists \xi \in (a,b)$ τ.ω $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
- f παρ. γν. αύξουσα $\Rightarrow f' \geq 0$

  γν. φθίνουσα $\Rightarrow f' \leq 0$.

  γν. $f' \geq 0$ $(>)$ $\Rightarrow f \uparrow$ $(\uparrow)$

  γν. $f' \leq 0$ $(<)$ $\Rightarrow f \downarrow$ $(\downarrow)$
- Θ. Fermat: f παρ. στο x_0 (x_0 εσωτ. σημείο) γν. x_0 σημείο ακροτάτου. $\Rightarrow f'(x_0)=0$.
- Θ. Taylor: f n φορές παραγ. στο I. Τότε $\forall a, b \in I$, $\exists \xi \in (a,b)$ τ.ω $f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(b-a)^n$.

Άσκηση

f: παρ. στο a. Βρείτε το $\lim_{x \to a} \frac{x f(a) - a f(x)}{x-a}$

Λύση: $\frac{x f(a) - a f(x)}{x-a} = \frac{x f(a) - a f(x) + x f(x) - x f(x)}{x-a} = \frac{-x(f(x)-f(a))}{x-a} + f(x)$

Scanned with CamScanner

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{-x(f(x)-f(a))}{x-a}\right)+f(x)=-af'(a)+f(a)$$

! **Δεν** πρέπει να κάνω ~~[illegible]~~ L'Hospital, γιατί δεν ξέρω αν η f είναι παρ σε γειτονιά του a.

//

Απόδειξη ανισοτήτων με χρήση ιδιοτήτων παραγώγου.

(i) $x\in\mathbb{R}$, $y>0$. Δ.ο $xy\le e^x+y(\ln y-1)$

Λύση: Θέτω $F(x)=e^x+y(\ln y-1)-xy\geq 0$, $y>0$ σταθ.

$$\left.\begin{array}{l} F(x)\xrightarrow{x\to+\infty}+\infty \\ F(x)\xrightarrow{x\to-\infty}+\infty\end{array}\right\}\text{ Η F έχει ελάχιστη τιμή.}$$

$F'(x)=e^x-y=0\Rightarrow e^x=y\Leftrightarrow x=\ln y$, $y>0$.

$F''(x)=e^x>0$. Άρα το $x_0=\ln y$ είναι σημείο ελαχίστου.

Επομένως, $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)\geq F(x_0)=e^{x_0}+y(\ln y-1)-(\ln y)y=$

$$=e^{x_0}+y\ln y-y\ln y-y=e^{x_0}-y=e^{\ln y}-y=0$$

Άρα $F(x)\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

(ii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παρ. γ' $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=l>0$. Δ.ο. $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

Λύση: Εφόσον $\lim f'(x)=l>0$, $\exists M>0$ τ.ω: για $x>M\Rightarrow$

$\Longrightarrow |f'(x)-l|<\varepsilon$ $\forall\varepsilon>0$.

Άρα $f(x)>l$, για $\varepsilon=l/2$

Κάνω ΘΜΤ στο $[M,x]$ γ' $\dfrac{f(x)-f(M)}{x-M}=f'(\xi)$, $\xi\in(M,x)$.

Όμως $f'(\xi)>l/2$. Άρα $\dfrac{f(x)-f(M)}{x-M}>1/2\Rightarrow$

Scanned with CamScanner

$$\rightarrow f(x) > \frac{\ell}{2}x - \frac{\ell}{2}M + f(M)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) > \lim_{x\to+\infty}\left(x\frac{\ell}{2} + f(M) - \frac{\ell}{2}M\right) = +\infty.$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Θεώρημα: Κανόνας της αλυσίδας.

Έστω $f: I \to J$, $g: J \to \mathbb{R}$, f παρ στο x_0 κ' g παρ στο $f(x_0)$.
Τότε η $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ παρ. στο x_0 κ' $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

Απόδειξη: $$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{\boxed{f(x)-f(x_0)}}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Δεν ξέρω αν μηδενίζεται. Θα ορίσω βοηθητική συνάρτηση $G: J\to\mathbb{R}$ ως

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-f(x_0)}{y-f(x_0)}, & y\neq f(x_0) \\[2ex] g'(f(x_0)), & y = f(x_0)\end{cases}$$

Η $G(y)$ είναι συνεχής στο $f(x_0)$ κ' $G(y)(y-f(x_0)) = g(y)-f(x_0)$ $\forall y\in J$.

Οπότε: $$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{\cancel{x}-x_0} = \frac{G(f(x))(f(x)-f(x_0))}{x-x_0} \xrightarrow{x\to x_0}$$

$$\xrightarrow{x\to x_0} g'(f(x_0))f'(x_0) = G(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$: Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης.

Έστω $I, J \subset \mathbb{R}$ ανοικτά διαστήματα γ' $f: I \to J$ αντιστρέψιμη γ' παρ. με $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$. Τότε η $f^{-1}: J \to I$. παρ. γ' $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Απόδειξη : Έστω $F: I \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}, & x \neq x_0. \\ \\ \dfrac{1}{f'(x_0)}, & x = x_0. \end{cases}$$

Η $F(x)$ συνεχής. Η $f^{-1}: J \to I$ είναι συνεχής, άρα η $F(f^{-1}(y))$ είναι συνεχής και

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} = F(f^{-1}(y)) \xrightarrow{x \to x_0}$$

$$\xrightarrow{x \to x_0} F(f^{-1}(f(x_0))) = F(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$