Θεώρημα : Darboux

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα κ' $f: I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Τότε η f' έχει την ιδιότητα της μέσης τιμής, δηλ. αν το ξ είναι ένας αριθμός ανάμεσα σε $f'(a)$ κ' $f'(b)$, τότε υπάρχει x_0 ανάμεσα στα a κ' b, τ.ω. $f'(x_0)=\xi$.

Απόδειξη: Ο.δ.ο $f'(a)\cdot f'(b)<0 \Rightarrow \exists x_0\in(a,b)$ τ.ω. $f'(x_0)=0$.
Χωρίς βλάβη της γενικότητος έστω $f'(a)<0$ κ' $f'(b)>0$.

$f'(a)<0$, δηλ. $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$, άρα $\exists\delta>0$ τ.ω. $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$ $\forall x\in(a,a+\delta)$

$f(x)<f(a)$ για $x\in(a,a+\delta)$, άρα το a δεν είναι ελάχιστο σημείο της.
Με παρόμοιο τρόπο το b δεν είναι σημείο ελαχίστου της f στο $[a,b]$.
Όμως η f έχει σημείο ελαχίστου, έστω $x_0\in(a,b)$ κ' $f'(x_0)=0$.
Για τη γενική περίπτωση εφαρμόζω το προηγούμενο αποτέλεσμα στη συνάρτηση $g'(x)=f(x)-\xi$. Αν $g'(a)g'(b)<0$, $\exists x_0\in(a,b)$, $g'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=\xi$ //

Εφαρμογή: Υπάρχει παραγωγίσιμη τ.ω. $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$.

Λύση: π.χ. για $\xi=1/2\in(0,1)\ \nexists$ τ.ω. $f'(x_0)=1/2$ άρα δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής, άρα $\nexists$ τέτοια συνάρτηση

Κυρτότητα

Θεώρημα : Έστω $I\subset\mathbb{R}$ ένα διάστημα κ' $f:I\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(1.) $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$.

(2) $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{f(z)-f(y)}{z-x}$.

(iii) $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$

(iv) $f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b)$, για $0\leq t\leq 1$

Απόδειξη: Θα δείξω (1)→(2). Τα υπόλοιπα με παρόμοιο τρόπο.

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z-x)(f(y)-f(x)) \leq (y-x)(f(z)-f(x)) \xrightarrow{\text{προσθαφαιρώ το } x}$$

$$\Leftrightarrow (f(y)-f(x))(z-x)+(f(y)-f(x))(x-y) \leq (f(z)-f(y))(y-x) \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(y)-f(x))(z-x) \leq (f(z)-f(y))(y-x)+(f(y)-f(x))(y-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(y)-f(x))(z-x) \leq (f(z)-f(x))(y-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \quad //$$

! Αν αναστρέψω όλες τις ανισότητες η συνάρτηση ονομάζεται κοίλη.

$\boxed{\text{Ορισμός}}$: Αν μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί οποιαδήποτε από τις συνθήκες (1) – (4) ονομάζεται κυρτή.

Η (4) σημαίνει ότι: Η εικόνα του ευθ. τμήματος 2 σημείων, μικρότερο από το ευθ. συνδ. των εικόνων.

Η (4) γενικεύεται επαγωγικά: Αν $x_1, x_2, .., x_n \in I$ κ' $t_1+t_2+\dots+t_n=1$ με $t_i \geq 0$

Τότε: $f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$

'Άσκηση

Παρατηρώντας ότι η συνάρτηση $\ln x$, $x>0$ είναι κοίλη. Δείξτε την ανισότητα.

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \quad (1), \quad x_i>0.$$

Λύση: Η (1) $\Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{n}x_1+\frac{1}{n}x_2+\cdots+\frac{1}{n}x_n\right) \geq \frac{1}{n}\ln(x_1\cdots x_n) =$

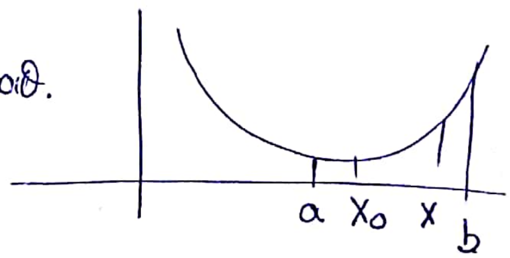
$$= \frac{1}{n}\ln x_1 \cdots \frac{1}{n}\ln x_n$$

Που είναι $f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$, με $t_i = 1/n$

$\boxed{\text{Θεώρημα I}}$: Έστω $I \subset \mathbb{R}$. ένα διάστημα, κ' $f: I \to \mathbb{R}$. μια κυρτή συνάρτηση. Τότε η f συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.

Απόδειξη: Έστω x_0 τυχαίο εσωτερικό σημείο. Επιλέγω 2 τυχαία σημεία a, b τ.ω. $a<x_0<b$. Έστω $x \in (x_0, b)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(b)-f(x_0)}{x-x_0} = M \text{ σταθ.}$$



$\Longrightarrow f(x)-f(x_0) \leq M(x-x_0)$ (1)

Με παρόμοιο τρόπο: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} = K$ σταθ

$\Longrightarrow f(x)-f(x_0) \geq K(x-x_0)$ (2)

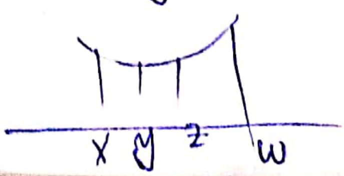
Από (1),(2) $\Longrightarrow K(x-x_0) \leq f(x)-f(x_0) \leq M(x-x_0)$, όπου M, K σταθ

Άρα για $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \Rightarrow f(x_0)$

Το ίδιο επιχείρημα όταν $x \in (a, x_0)$ //

$\boxed{\text{Θεώρημα II}}$: Έστω. $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοικτό διάστημα κ' $f: I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Η f είναι κυρτή ανν η f' αύξουσα.

Απόδειξη: Έστω f κυρτή κ' έστω $x<\omega$.



$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le f'(w)$$ στη συνέχεια παίρνω το όριο. $y \to x$.

$f'(x) \le f'(w)$.

Άρα η f αύξουσα

<u>Αντίστροφα</u>: Έστω f' αύξουσα. Ν.δ.ο. f κυρτή. Έστω $x<y<z$

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Από ΘΜΤ. $\exists\, \xi_1 \in (x,y)$ κ' $\xi_2 \in (y,z)$ τ.ω.

$$f'(\xi_1) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \text{κ'} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

$$f'(\xi_1)(y-x) \le f'(\xi_2)(z-y)$$

Όμως $\xi_1 < \xi_2$, άρα $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$

<u>Άσκηση</u>:

Αν f κυρτή κ' φραγμένη τότε f σταθερή στο $\mathbb{R}$

Λύση: Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή. Τότε $\exists\, a, b$ τ.ω $f(a) \neq f(b)$

για $a<b<x$, τότε $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$

$$\Rightarrow f(x)-f(b) \geq \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(x-b)$$

Αν $f(b)>f(a)$ έχω αντίφαση, διότι για $x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$ <u>άτοπο!</u>

Αν $f(b)<f(a)$ τότε επιλέγω $x<a<b$.

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le \frac{f(a)-f(x)}{a-x} = -M < 0.$$

$$f(a) - f(x) \le -M(a-x) \Rightarrow f(x) \geq f(a) + M(a-x)$$

$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to +\infty$ <u>άτοπο</u>