Ανάλυση Ι

Τρίτη 11/2/2022

Πρόοδος #2 (i) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+\sqrt{1}} + \cdots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$. $n+1$ όροι. (όχι n όροι).

$\frac{1}{n}$: πιο μεγάλος στο άθροισμα

$\frac{1}{n+\sqrt{n}}$: πιο μικρός

Άρα $(n+1)\frac{1}{n+\sqrt{n}} \le a_n \le (n+1)\frac{1}{n}$

$(n+1)\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \to 1$

$$\frac{n+1}{n+\sqrt{n}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \longrightarrow 1$$

Από Κριτήριο Παρεμβολής.

(ii) Μελετήσετε ως προς τη σύγκλιση γ' την απόλυτη σύγκλιση τη $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

(Είναι όπως στις σημειώσεις η $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$)

Σκέφτομαι Κρ. Dirichlet δηλ. $\sum (-1)^n b_n$. Θα πρέπει $0 < b_n \searrow 0$ φθίνοντας στο 0.

Όμως η $b_n = \frac{1}{n+(-1)^n}$ δεν είναι φθίνουσα.

Για να είναι φθίνουσα πρέπει $\begin{cases} b_{2k} \geq b_{2k+1} \\ \text{και} \\ b_{2k-1} \geq b_{2k} \iff \frac{1}{2k-2} \geq \frac{1}{2k+1} \end{cases}$ Για περιττούς OK ✓.

Για άρτιους $b_{2k} \geq b_{2k+1} \iff \frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{2k}$ όχι!

Άρα δεν μπορεί να εφαρμοσθεί το κρ. του Dirichlet.

Εύκολος τρόπος λύσης: Πολ/ζω με συζυγή παράσταση για να φύγουν τα $(-1)^n$ που με ενοχλούν

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n n - (-1)^n(-1)^n}{(n+(-1)^n)\underbrace{(n-(-1)^n)}_{\text{συζυγής}}} = \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2-1} - \frac{1}{n^2-1}.$$

Scanned with CamScanner

Αυτή η συνάρτηση είναι κατάλληλη για Κρ. Dirichlet.

Όμως $b_n = \frac{n}{n^2-1}$ είναι φθίνουσα;.

Έστω $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-1)-2x\cdot x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} < 0$.

Άρα πράγματι $b_n \searrow 0$.

Συνεπώς από Dirichlet συγκλίνει.

Επίσης η $\sum \frac{1}{n^2-1}$ συγκλίνει. (Σύγκριση με $\sum \frac{1}{n^2}$), άρα και η αρχική

$\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ συγκλίνει.

Πρώτα ελέγχω απόλυτη σύγκλιση γ' μετά αυτά

$$\left|\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}\right| = \frac{1}{n+(-1)^n}$$

Προσοχή

$\boxed{a < b + \varepsilon \quad \text{Το θυμάμαι}}$

Συγκρίνω με την $\frac{1}{n}$. $\rightsquigarrow$ $\frac{1/n}{1/n+(-1)^n} = \frac{n+(-1)^n}{n} \longrightarrow 1$

Όμως η $\sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει, άρα γ' η $\sum \frac{1}{n+(-1)^n}$ αποκλίνει.

Συνεπώς δεν έχω απόλυτη σύγκλιση.

Πρόοδος #3.

i) $\limsup(a_n+b_n) \le \limsup a_n + \limsup b_n$, a_n, b_n φραγμένες.

Λύση: Έστω n = σταθ. γ' $l \ge n$. Τότε $a_l \le \sup_{k\ge n} a_k$.

$a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_l, \dots$ ($\sup_{k\ge n}$)

$b_l \le \sup_{k\ge n} b_k$

$\Longrightarrow a_l + b_l \le \sup_{k\ge n} a_k + \sup_{k\ge n} b_k$

$\Downarrow$ (n = σταθ)

(1) $\sup_{l\ge n}(a_l+b_l) \le \sup_{k\ge n} a_k + \sup_{k\ge n} b_k$ $\searrow$ φθίνουσα

Scanned with CamScanner

Όλες οι ακολουθίες της (1) είναι φθίνουσες κ' φραγμένες, άρα συγκλίνουν καθώς $n \to +\infty$

Άρα (1) $\sup_{\ell \geq n} (a_\ell + b_\ell) \leq \sup_{k \geq n} a_k + \sup_{k \geq n} b_k$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\overline{\lim} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n .$$

Προσοχή! $a_k \leq \limsup a_n \longrightarrow$ Λάθος εν γένει.

πχ1: $a_n = \frac{1}{n}$, $\limsup \frac{1}{n} = 0 = \liminf \frac{1}{n}$

Αλλά $a_k < \limsup a_n \quad \forall k \geq 1$.

Είναι όριο κ' έχει ιδιότητες ορίων.

πχ2: $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $\liminf b_n = 0 = \limsup b_n$

Ομοίως με πχ1.

Ξέρω ότι $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_\ell, \ldots$

Θεωρία

$U_n = \sup_{k \geq n} a_k$

$U_n \longrightarrow \overline{\lim}\, a_n$

---

ii) $\overline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim} (a_n + b_n)$

$\longrightarrow$ $b_n \quad b_{n+1} \quad b_{n+2} \quad b_\ell$

Λύση: Έστω n = σταθ. κ' $\ell \geq n \leadsto b_\ell \geq \inf_{k \geq n} b_k$

Προσθέτω το a_ℓ κ' στα 2 μέλη. ~~και στα 2~~: $b_\ell + a_\ell \geq \inf_{k \geq n} b_k + a_\ell$.

Κάπου πρέπει να εμφανίσω $\sup a_n$, άρα λέω $\sup_{\ell \geq n}(a_\ell + b_\ell) \geq a_\ell + b_\ell \geq \inf_{k \geq n} b_k + a_\ell$

Scanned with CamScanner

Μου λείπει ένα sup Α στο δεξί μέλος. Θα ομογενοποιήσω τα αl. που με ενοχλεί και θα αλλάξω τους δείκτες για να με βολεύει.

$$\Leftrightarrow \quad a_l \le \sup_{k\geq n}(a_k+b_k) - \inf_{k \geq n} b_k \quad \Longrightarrow \quad \sup_{k\geq n} a_k \le \sup_{k\geq n}(a_k+b_k) - \inf_{k\geq n} b_k$$

Τώρα πλέον έχω μονότονες ακολουθίες, άρα δικαιούμαι να πάρω όρια.

Παίρνω το όριο $n \to \infty$

$$\overline{\lim}\, a_n \le \overline{\lim}\,(a_n+b_n) - \underline{\lim}\, b_n$$

$\Phi_{8/2}$ | Για δοθέν $\varepsilon>0$, $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ τω. $|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(2)|<\varepsilon$ για $f(x)=x^4$. (Ορισμός Συνέχειας)

Λύση: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υπάρχω $0<\delta<\delta_0$. (Με βολεύει να το φράξω γιατί μου δίνει επιπλέον πληροφορία)

$$|f(x)-f(2)| = |x^4-2^4| = |(x^2+2^2)(x^2-2^2)| = |(x^2+2^2)\cdot(x+2)(x-2)|$$

Έχω ότι $|x-2|<\delta_0 \Leftrightarrow 2-\delta_0<x<2+\delta_0$.

Για $\delta_0=1$ έχω ότι $1<x<3$ (δε θα με βόλευε πχ $\delta_0=3$ γιατί θα είχα αρνητικά και θα έπρεπε να ελέγχω κάθε φορά τα πρόσημα)

→ Άρα θα τα φράξω γιατί ξέρω $|x-2|<\delta$

$$\left.\begin{aligned} x^2+2^2 &< 9+4=13 \\ x+2 &< 3+2=5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |f(x)-f(2)| < \underbrace{13\cdot 5}_{65}\,|x-2| \overset{\text{θέλω}}{<} \varepsilon$$

Αρκεί λοιπόν $\delta=\dfrac{\varepsilon}{65}$. Οτιδήποτε μικρότερο είναι επίσης μια χαρά.

Έχω πει ότι $\delta\le 1$ άρα θα πάρω τελικά $\delta=\min\left(\dfrac{\varepsilon}{65},1\right)$

Scanned with CamScanner

$\boxed{\Phi_8/4}$ (i) $f : (-\alpha, \alpha) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$\lim f(x) = l$ ανν $\lim_{x\to 0} f(x^3) = l$ (ii) $\left(\lim_{x\to 0} f(x^2) \overset{?}{=} l\right)$

Λύση: "$\Longrightarrow$" Έστω $\lim_{x\to 0} f(x) = l$. (1).

Έστω $\varepsilon > 0$. Από (1) έχω ότι $\exists \delta < 1$ ← μπορώ να υποθέσω ότι είναι όσο μικρό θέλω.

σημαίνει

τ.ω $|x| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Όμως $|x^3| < |x| < \delta$

διότι παίρνω $\delta < 1$ για να εξασφαλίσω αυτό

~~(άρα έχω ότι $|f(x^3) - l| < \varepsilon$)~~

Άρα τελικά έχω ότι $|x| < \delta \; (< 1) \Rightarrow |f(x^3) - l| < \varepsilon$.

άρα (από ορισμό ορίου) $\lim_{x\to 0} f(x^3) = l$.

"$\Longleftarrow$" Έστω $\lim_{x\to 0} f(x^3) = l$ (2)

Έστω $\varepsilon > 0$. Από (2) έχω ότι $\exists \delta < 1$ τ.ω όταν $|x| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x^3) - l| < \varepsilon$. (2')

Έστω y τ.ω $|y^{1/3}| < \delta \iff |y| < \delta^3 < \delta$.

τότε $|f(y) - l| < \varepsilon$. (από (2') για $x = y^{1/3}$)

Άρα έχω ότι $\forall y$ με $|y| < \delta^3 = \delta' \Rightarrow |f(y) - l| < \varepsilon$.

$\iff \lim_{y\to 0} f(y) = l$.

Για το (ii) ερώτημα θα πάω να κάνω αντιπαράδειγμα (γιατί δε θα μπλεχτώ με ε, δ)

Έστω $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $\lim_{x\to 0} f(x) \nexists$, $\lim_{x\to 0} f(x^2) = 1$

Scanned with CamScanner

Φ11/23 f παρ στο 0. Δο. $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(2x)+f(x)-2f(0)}{3x}$.

Λύση: Θα πάω να εμφανίσω τον ορισμό της παραγώγου

$$\frac{f(2x)+f(x)-2f(0)}{3x} = \frac{f(2x)-f(0)}{3x} + \frac{f(x)-f(0)}{3x}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{f(2x)-f(0)}{2x-0}\right) \xrightarrow{x\to 0} f'(0)$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow{x\to 0} f'(0), \qquad \frac{f(2x)-f(0)}{2x-0} \xrightarrow{x\to 0} f'(0)$$

Παρ: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$? Υπάρχει ?

Λύση: Θα προσθαφαιρέσω το $f(0)$

$$\frac{f(x)-f(-x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x} - \frac{f(-x)-f(0)}{x} \to 2f'(0)$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} \xrightarrow{x\to 0} f'(0)$$

$$\frac{f(-x)-f(0)}{x} \to \frac{f(-x)-f(0)}{-x-0} \xrightarrow{x\to 0} f'(0)$$

$\boxed{\Phi 11/5}$ $f(x) = [x]\sin^2(\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$

Λύση: Στα διαστήματα $x \in [n, n+1)$, $[x] = n$. γ' η f είναι παραγωγίσιμη

Άρα πρέπει να ~~καταστήσ~~ ελέγξουμε τα σημεία $x = n$, $n = 0, \pm 1, \dots$

Έστω $x = n$, $f(n) = n\sin^2(\pi n) = 0$

Ελέγχω $\frac{f(x)-f(n)}{x-n}$, για $x \in (n, n+1) \rightsquigarrow \frac{n\sin^2(\pi x) - 0}{x-n} \xrightarrow{x \to n} \frac{0}{0}$

πλευρικό όριο από αντίστοιχα μεριά

Και $\frac{f(x)-f(n)}{x-n}$, για $x \in (n-1, n)$

D.H.L. $\lim\limits_{x \to n^+} \frac{n\sin^2(\pi x)}{x-n} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to n^+} \frac{n\, 2\overset{0}{\sin(\pi x)}\pi\cos(\pi x)}{1} = 0$. $\forall n$

$\frac{(n-1)\sin^2(\pi x)}{x-n} \rightsquigarrow \lim\limits_{x \to n^-} \frac{(n-1)\sin^2(\pi x)}{x-n} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x \to n^-} \frac{(n-1)2\sin(\pi x)\pi\cos(\pi x)}{1}$

$= 0$.

Άρα η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$

Επίσης δείχνω

Για $x \in (n, n+1)$, $f(x) = n\sin(\pi x)$, $f'(x) = n\,2\sin(\pi x)\pi\cos(\pi x) =$

$= 2n\pi\sin(\pi x)\cos(\pi x)$

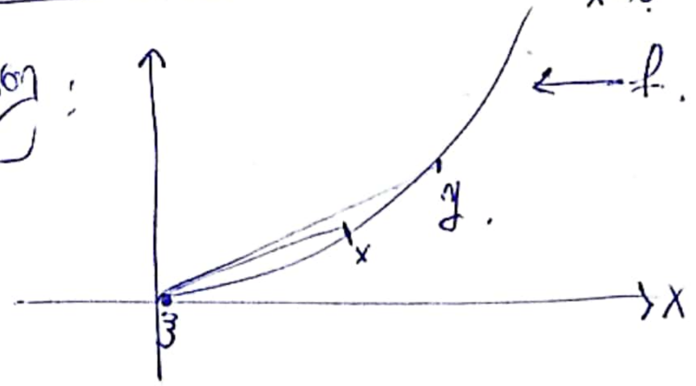
$= n\pi\sin(2\pi x)$

$$\boxed{\begin{gathered} f'(x) = \pi[x]\sin(2\pi x) \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{gathered}}$$

Scanned with CamScanner

Φ12/ 4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κυρτή, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$, Δ.ο. $\frac{f(x)}{x}$ ↑ στο $(0,\infty)$

λύση:



Έστω x,y τυχαία σημεία με $0<x<y$

Θ.δ.ο. $\frac{f(x)}{x} < \frac{f(y)}{y}$ (1)

Θα εμφανίσω σχέσεις κυρτότητας.

Λόγω κυρτότητος έχω $\frac{f(x)-f(\zeta)}{x-\zeta} < \frac{f(y)-f(\zeta)}{y-\zeta}$.

Επειδή $\exists$ το $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, παίρνω το όριο $\zeta\to 0^+$ $\Longrightarrow$ Παίρνω τελικά την (1)

Λάθος τρόπος επίλυσης) παίρνω παράγωγο για να τη βγάλω αύξουσα $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$.

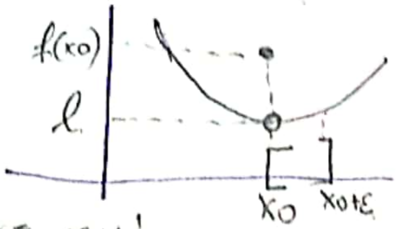
Δεν ξέρω αν f παραγωγίσιμη. και δεν μπορώ να πάρω παράγωγο.

Φ12/1 f παραγωγίσιμη. $f:(\alpha,b)\to\mathbb{R}$ γ' έχω $x_0\in(\alpha,b)$ Εσωτερικό σημείο του (α,b)

Αν $\lim_{x\to x_0} f'(x)=\ell$, τότε f' συνεχής στο x_0.

λύση: Από Θ. Darboux, η f' έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής, δηλαδή αν $x\in[\gamma,\delta]$ γ' ζ ανάμεσο στα $f'(\gamma)$ γ' $f'(\delta)$, τότε υπάρχει $\bar{x}\in(\gamma,\delta)$ τ.ω. $f'(\bar{x})=\zeta$

Έστω το διάστημα $[x_0,x_0+\varepsilon]$ για μικρό $\varepsilon>0$.



$f'(x_0)>\ell$ γ' $f'(x_0+\varepsilon)$ πολύ κοντά στο ℓ

από ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής η f' παίρνει κάθε τιμή μεταξύ $f'(x_0)$ γ' ℓ όταν $x\in[x_0,x_0+\varepsilon]$. Άτοπο, γιατί για ε μικρό $|f'(x)-\ell|<\varepsilon'$ για οσοδήποτε μικρό ε.

Scanned with CamScanner

Ανάλυση Ι.   Παρασκευή 14/01/2022.

$\boxed{\Phi_{12}/1}$ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$, $\lim f'(x)=l \Longrightarrow f'(x_0)=l$

λύση: Έστω ότι $f'(x_0)>0$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας)

Έστω $0<\varepsilon<\dfrac{f'(x_0)-l}{3}$. Από ορισμό του ορίου $\exists\,\delta$ τ.ω. $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow$

$\Longrightarrow |f'(x)-l|<\varepsilon$.

Έστω $\xi\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, τότε έχω ότι $|f'(\xi)-l|<\varepsilon \Longleftrightarrow l-\varepsilon<f'(\xi)<l+\varepsilon$. το Θ Darboux στο $[\xi,x_0]$

Επίσης έχω ότι $f'(x_0)>l$. Εφαρμόζω στο $[\xi,x_0]$

(ή $[x_0,\xi]$ αν $\xi>x_0$)

Άρα $\exists$ σημείο $\bar{x}\in(\xi,x_0)$ τ.ω. $f'(\bar{x})=\dfrac{l+f'(x_0)}{2}$ αυτό είναι άτοπο!

διότι πρέπει $l-\varepsilon<f'(\bar{x})<l+\varepsilon<l+\varepsilon<l+\dfrac{f'(x_0)-l}{3}=\dfrac{f'(x_0)+2l}{3}<\dfrac{l+f'(x_0)}{2}$

$\Updownarrow$

$2f'(x_0)+4l<3l+3f'(x_0)$

$\Updownarrow$

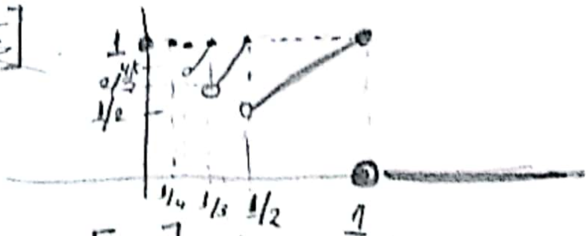
$l<f'(x_0)$

Άσκηση* $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right], & x\neq 0\\ 1, & x=0.\end{cases}$

Σχεδιάστε το γράφημα κ' εξετάστε ως προς τη συνέχεια στο $x=0$.

λύση

~~$\frac{1}{x}$ γίνεται όλο και μικρότερο άρα $\left[\frac{1}{x}\right]$~~



$x>1 \Longrightarrow 0<\dfrac{1}{x}<1 \to \left[\dfrac{1}{x}\right]=0.$

Εύκολα, ορίζω $x_n=\dfrac{1}{n}$, $n=1,2,\dots$ τότε $x_n\left[\dfrac{1}{x_n}\right]=\dfrac{1}{n}[n]=\dfrac{1}{n}\cdot n=1$

Ελέγχω τι γίνεται όταν $\dfrac{1}{n+1}<x\leq\dfrac{1}{n} \Longleftrightarrow n\leq\dfrac{1}{x}<n+1$

Scanned with CamScanner

$\left[\frac{1}{x}\right] = n$. Άρα για $\frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n}$, $f(x) = nx$

Όταν έχω όρια με ακέραιο μέρος χρησιμοποιώ την $\boxed{[\alpha] \le \alpha} < [\alpha]+1$.

$$x\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{\left[\frac{1}{x}\right]}{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow \frac{1}{x} - 1 < \boxed{\left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x}}$$

$[\alpha] > \alpha - 1$

$$1 - x < \frac{\left[\frac{1}{x}\right]}{\frac{1}{x}} \le 1$$

$\searrow 1$

Για $x \to 0$ $\Longrightarrow \lim\limits_{x \to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$.

Scanned with CamScanner

Φ12 (5) $f(-1) = f(0) = f'(0) = 0$, $f(1) = 1 \Rightarrow \exists\, \xi \in (0,1)$ τ.ω $f^{(3)}(\xi) \leq 3$

Λύση: Στο $(0,1)$: $f(1) = f(0) + f'(0)\cdot 1 + \frac{1}{2} f''(0)\cdot 1^2 + \frac{1}{6} f'''(s)\, 1^3$ $s \in (0,1)$ (Taylor στο $(0,1)$)

Στο $(-1,0)$: $f(-1) = f(0) + f'(0)(-1) + \frac{1}{2} f''(0)(-1)^2 + \frac{1}{6} f'''(t)(-1)^3$ $t \in (-1,0)$

Άρα $1 = \frac{1}{2} f''(0) + \frac{1}{6} f^{(3)}(s)$, για κάποιο $s \in (0,1)$

$(-)$ $\quad 0 = \frac{1}{2} f''(0) - \frac{1}{6} f^{(3)}(t)$, για κάποιο $t \in (-1,0)$

με αφαίρεση $\Longrightarrow f^{(3)}(s) + f^{(3)}(t) = 6 \Longrightarrow \exists\, \xi \in (-1,1)$ $f^{(3)}(\xi) \leq 3$

$\boxed{\text{Φ10/1}}$ $f, g\ I \to \mathbb{R}$, $f^2(x) = g^2(x) > 0$ ← θυμούμενο ότι είναι γν. δεικτο

g' συνεχής.

$\forall x \in I \overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{cases} f(x) = g(x) & \forall x \in I \\ \text{ή} & \\ f(x) = -g(x) & -\text{''}- \end{cases}$

Λύση: Επειδή $f^2, g^2 > 0$ άρα οι f, g κρατάνε σταθερό πρόσημο. Γιατί δε μηδενίζονται.

Έστω ~~...~~ ότι δεν ισχύει η $(*)$

Τότε υπάρχουν 2 σημεία τ.ω $f(x_0) = g(x_0)$ κ' $f(x_1) = -g(x_1)$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας $g(x_0) > 0$.

Άρα $f(x_0) > 0$, $f(x_1) < 0$ άτοπο!, διότι κ' η $g(x)$ $f(x)$ πρέπει να κρατάει πρόσημο.

Πχ

$f^2 = g^2$ ($f = -g$ εδώ)

$f^2 = h^2$

Scanned with CamScanner