Ανάλυση Ι (1) Τρίτη 12/10/2021

Ακολουθίες Πραγματικών αριθμών

Ορισμός : Μια ακολουθία είναι μια συνάρτηση $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Ορισμός : Έστω x_n μια ακολουθία γ' $\ell \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι η x_n συγκλίνει στο ℓ αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τω αν $n \geq n_0$ τότε : $|x_n - \ell| < \varepsilon$.

Ο ℓ είναι το όριο της ακολουθίας γ' το συμβολίζω $\lim_{n \to +\infty} x_n = \ell$ ή $x_n \to \ell$, $n \to +\infty$.

Πχ : (1) $x_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$.

$|x_n - \ell| = \frac{1}{n}$, $\varepsilon = 0.1 \Rightarrow \frac{1}{n} < 0.1$, $n > 10$.

$n_0 = 11$ $\forall n \geq n_0$ $\frac{1}{n} < 0{,}1$

$\varepsilon = 0.01$ $\frac{1}{n} < 0.01$, $n_0 = 101$

(2) $x_n = 1 + \frac{1}{n^2}$, $\lim_{n \to +\infty} x_n = 1$

Θέλουμε $\forall \varepsilon > 0$ να βρούμε ένα $n_0(\varepsilon)$ τ.ω. $|x_n - 1| < \varepsilon$ αν $n \geq n_0(\varepsilon)$

$\varepsilon = 0.2$: $\frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > 5 \Rightarrow n > \sqrt{5} \Rightarrow n_0 = 3$.

$\varepsilon = 0.01$: $n^2 > 100 \iff n > 10 \longrightarrow n_0 = 11$

Γενικά : $\frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

(3) $x_n = (-1)^n \rightsquigarrow -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$

Έστω ότι $\lim_{n \to +\infty} (-1)^n = \ell$.

Για $\varepsilon = \frac{1}{2}$: $|x_n - \ell| < \frac{1}{2}$ $\forall n \geq n_0$.

$$|x_{2n} - \ell| < \frac{1}{2} \iff |1 - \ell| < \frac{1}{2}$$

$$|x_{2n+1} - \ell| < \frac{1}{2} \iff |-1 - \ell| < \frac{1}{2}.$$

$$|1 - \ell| < \frac{1}{2} \quad , \quad |1 + \ell| < \frac{1}{2}$$

$2 = 1 - \ell + \ell + 1 \leq |1 - \ell| + |1 + \ell| < 1 \Rightarrow 2 < 1$ Άτοπο!!!

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$: (Μοναδικότητα του Ορίου)

Έστω x_n ακολουθία στο ℓ_1 γ' στο ℓ_2.

$\left(\lim_{n \to +\infty} x_n = \ell_1 \ , \ \lim_{n \to +\infty} x_n = \ell_2\right)$, τότε $\ell_1 = \ell_2$

Απόδειξη : $\exists n_1$ τ.ω $|x_n - \ell_1| < \varepsilon/2$ $\forall n \geq n_1$.

$\exists n_2$ τ.ω $|x_n - \ell_1| < \varepsilon/2$ $\forall n \geq n_2$

$n \geq \max\{n_1, n_2\}$

$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - x_n + x_n - \ell_2| \leq |x_n - \ell_1| + |x_n - \ell_2| < \varepsilon$

Άρα $|\ell_1 - \ell_2| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$.

Άρα πρέπει $\ell_1 = \ell_2$

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$ Αν η x_n συγκλίνει τότε είναι φραγμένη

Απόδειξη : $\exists n_0$ τ.ω $|x_n - \ell| < 1$ $\forall n \geq n_0$.

$\Rightarrow -1 < x_n - \ell < 1 \iff \ell - 1 < x_n < \ell + 1$ $\forall n \geq n_0$.

$|x_n| < 1 + |\ell|$ $\quad (|x_n| - |\ell| < |x_n - \ell| < 1)$

$C = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0 - 1}|, 1 + |\ell|\}$.

Προφανώς $|x_n| \leq c \ \forall n \in \mathbb{N}$, άρα x_n φραγμένη

πχ: $x_n = n$, $x_n = \sqrt{n}$ μη φραγμένες

$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ φραγμένη.

Θεώρημα: Αν x_n συγκλίνει στο ℓ, τότε η $|x_n|$ συγκλίνει στο $|\ell|$.

Απόδειξη: $\left(\big| |x_n| - |\ell| \big| \leq |x_n - \ell| \right)$

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists n_0(\varepsilon)$ τ.ω $|x_n - \ell| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \big| |x_n| - |\ell| \big| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0(\varepsilon)$

Θεώρημα: Έστω x_n, y_n ακολουθίες με $x_n \to \ell_1$ κ' $y_n \to \ell_2$:

- $x_n + y_n \to \ell_1 + \ell_2$
- $z_n = a x_n \to a \ell_1$, $a \in \mathbb{R}$.

1 Ανάλυση I — Πέμπτη 14/10/2021

Ορισμός
$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0(\varepsilon)$ τ.ω. $|x_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon)$

πχ: $\frac{1}{n} \to 0 \rightsquigarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\rightsquigarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, άρα ως n_0 θα πάρω το μεγαλύτερο φυσικό αριθμό

$$n_0 = \left[\frac{1}{n}\right] + 1.$$

Θεώρημα
Έστω $x_n \to l_1$, $y_n \to l_2$ ($\lim_{n\to\infty} x_n$, $\lim_{n\to\infty} y_n$), τότε:

(1) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = l_1 + l_2$

(2) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = l_1 l_2$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a x_n) = a l_1, \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Απόδειξη: (1) $\varepsilon > 0$ τυχαίο.
Εφόσον x_n συγκλίνουσα, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|x_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_1$
y_n συγκλίνουσα, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $|y_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_2$

Έστω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

Θέλω να εκτιμήσω
$|x_n + y_n - (l_1 + l_2)| \leq |x_n - l_1| + |y_n - l_2|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, άρα $\forall \varepsilon > 0$, $|(x_n + y_n) - (l_1 + l_2)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

---

(2) Εφόσον η y_n συγκλίνουσα είναι φραγμένη, άρα ισχύει $|y_n| \leq M \quad \forall n$.
$\varepsilon > 0$ τυχαίο.
$x_n \to l_1 \quad \exists n_1$ τ.ω. $|x_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{|l_1| + M} \quad \forall n \geq n_1$
$y_n \to l_2 \quad \exists n_2$ τ.ω. $|x_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{|l_1| + M} \quad \forall n \geq n_2$

Επιλέγω $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$$|x_n y_n - l_1 l_2| \xrightarrow[l_1 y_n]{\text{προσθαφαιρώ}} |x_n y_n - l_1 y_n + l_1 y_n - l_1 l_2| \leq$$

$$\leq |y_n||x_n - l_1| + |l_1||y_n - l_2| < M \frac{\varepsilon}{|l_1| + M} + |l_1| \frac{\varepsilon}{|l_1| + M} \quad \forall n \geq n_0$$

$$= \varepsilon.$$

Συνεπώς $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ τ.ω $|x_n y_n - l_1 l_2| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

---

(3) Θέλω να αποδ. $|a x_n - a l_1| < \varepsilon \iff |a||x_n - l_1| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ για κάποιο n_0

Για $a = 0$ η μηδενική ακολουθία συγκλίνει στο $c = 0$

Έστω $a > 0$ Εφόσον x_n συγκλίνουσα $\Rightarrow |x_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{a} \ \forall n \geq n_0$.

Συνεπώς $|a x_n - a l_1| < \varepsilon$ για $n \geq n_0$.

Για $a < 0$ ...... $|a|$ ....

Θεώρημα (1)+(2)

$x_n \to l_1$, $y_n \to l_2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, τότε $a_1 x_n + a_2 y_n \to a_1 l_1 + a_2 l_2$

~~Θεώρημα~~ ~~$x_n \to l_1$, $y_n \to l_2$~~

Θεώρημα: Έστω x_n μια ακολουθία μη μηδενικών αριθμών, τ.ω. $x_n \to l$, τότε $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{l}$

Απόδειξη: $|x_n - l| < \frac{|l|}{2} \ \forall n \geq n_1$ για κάποιο n_1.

Γνωρίζω την (έχουμε ότι) ανισότητα $||x_n| - |l|| \leq |x_n - l|$, άρα

άρα $||x_n| - |l|| < \frac{|l|}{2} \ \forall n \geq n_1$

$$\Rightarrow -\frac{l}{2} < |x_n| - |l| < \frac{l}{2} \ \forall n \geq n_1$$

Έστω τυχαίο $\varepsilon>0$, έχουμε ότι $|x_n - \ell| < \varepsilon \frac{\ell^2}{2}$ για $n \geq n_2$

$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - x_n|}{|x_n|\,|\ell|} < \frac{\varepsilon \frac{\ell^2}{2}}{|\ell|\,\frac{|\ell|}{2}} = \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$: $y_n \to \ell_2 \Leftrightarrow \frac{1}{y_n} \to \frac{1}{\ell_2}$

$x_n \to \ell_1 \Rightarrow x_n \cdot \frac{1}{y_n} = \ell_1 \cdot \frac{1}{\ell_2}$ $\Bigg\}$ $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{\ell_1}{\ell_2}$

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$ (Ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες)

Έστω έχουμε τρεις ακολουθίες x_n, y_n, z_n και:

(1) $x_n \leq y_n \leq z_n \ \forall n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ell$.

Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell$

Απόδειξη: Έχω: $|x_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$

$|z_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_2$ $\qquad n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

για $n \geq n_0$: $-\varepsilon < -|x-\ell| < x_n - \ell \leq y_n - \ell \leq z_n - \ell \leq |z_n - \ell| < \varepsilon$

$\Rightarrow |y_n - \ell| < \varepsilon$

Πχ: $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$

$-\frac{1}{n} \searrow 0, \quad \frac{1}{n} \searrow 0$

Εφαρμογή 1η Αν: $\tilde{x}_n$ φραγμένη ακολουθία

$\tilde{y}_n \to 0$.

$\exists M > 0$ ώ.ω $|\tilde{x}_n| < M \quad \forall n$

τότε $\tilde{x}_n \tilde{y}_n \to 0$, γιατί;

Ας πάρω $0 \leq |\tilde{x}_n \tilde{y}_n| \leq M |\tilde{y}_n|$

Εφαρμόζω το Θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών.

$x_n = 0$, $z_n = M|\tilde{y}_n|$, $y_n = \tilde{x}_n \tilde{y}_n$

Εφαρμογή 2.

Έστω

$x_n = \alpha^n$, $|\alpha| < 1$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ (πχ $\alpha = \frac{1}{2}$)

γιατί;

Από το Θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών

Έστω $\alpha \neq 0$. (για 0 τετριμμένο) $\frac{1}{|\alpha|} > 1 \Rightarrow \exists \delta$ ώ.ω $\frac{1}{|\alpha|} = 1 + \delta$

Έχουμε ότι $(1+\delta)^n \geq 1 + n\delta \geq n\delta$.

$$\left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^n = (1+\delta)^n \geq 1 + n\delta \geq n\delta$$

άρα $0 \leq |\alpha|^n \leq \underbrace{\frac{1}{n\delta}}_{\to 0}$