

1) $|a| < 1 \rightarrow a^n \rightarrow 0$.

2) $a > 0$, $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$: Έστω $a > 1$, $\sqrt[n]{a} = 1 + \theta_n$ ^{κατά θετικό.} $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = (1 + \theta_n)^n =$

Δυναμικός
συνδυασμός $1 + n\theta_n + \dots > 1 + n\theta_n > n\theta_n$.
^{θετικοί όροι.}

$\Rightarrow 0 < \theta_n < \frac{a}{n} \Rightarrow \theta_n \rightarrow 0$.

Επομένως αφού $\theta_n \rightarrow 0 \Rightarrow$ Άρα $\sqrt[n]{a} = 1 + \theta_n \rightarrow 1$

• Αν $a < 1$ τότε $\frac{1}{a} > 1$

3) $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$:

αποδείξω: ~~...~~ $\Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + \theta_n$, $n \geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = (1 + \theta_n)^n = 1 + n\theta_n + \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 + \dots > \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2$

$\Rightarrow \theta_n^2 < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \theta_n^2 \rightarrow 0$

$\theta_n > 0 \Rightarrow \theta_n \rightarrow 0$ (γιατί) θέλει κινδ. H/W.

Άρα $\sqrt[n]{n} = 1 + \theta_n \rightarrow 1$

Ορισμός: $\{x_n\}$ αποκλίνει στο $+\infty$ ή τείνει στο $+\infty$ ή $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ αν
 $\forall M > 0 \exists n_0$ τέτοιο ώστε $\forall n > n_0$. $x_n > M$
 $x_n < -M$

πx : $x_n = n^2 \rightarrow +\infty$

$x_n = -n^3 \rightarrow -\infty$

$x_n = (-1)^n n$. Δεν κάνει τίποτα, δηλαδή δεν αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, ούτε συγκλίνει

Θεώρημα: Αν $x_n \leq y_n$ τότε αν $x_n \rightarrow +\infty \Rightarrow y_n \rightarrow +\infty$
 αν $y_n \rightarrow -\infty \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty$

Απόδειξη: $x_n \rightarrow +\infty$. Έστω $M > 0$, $\exists n_0$ τ.ω. $n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M$.
 Όμως $y_n \geq x_n$, άρα $y_n > M \Rightarrow y_n \rightarrow +\infty$.

Μια ιδιότητα που λαμβάνει από ένα δείκτη και μετά λέμε ότι ισχύει τελικά

π.χ: $x_n = \begin{cases} n, & n \leq 100 \\ \frac{1}{n}, & n > 100 \end{cases}$, $y_n = \begin{cases} n^2, & 100 \leq n \\ \frac{1}{n^2}, & 100 < n \end{cases}$

Εδώ έχω $\frac{1}{n} > \frac{1}{n^2}$

Άρα τελικά $x_n > y_n$. Αυστηρή φράση

Θεώρημα: $x_n \neq 0$ γ' $x_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$

Εφόσον πάει στο $+\infty$ για κάποιο M από ένα δείκτη και μετά πάει στο 0 , δηλαδή αν $x_n \rightarrow +\infty$ τελικά όλοι οι όροι είναι θετικοί.

Απόδειξη: Έστω $x_n \rightarrow +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $x_n \rightarrow +\infty$ $\exists n_0$ τέτοιο
 ώστε για $n \geq n_0$ $x_n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{x_n} < \varepsilon$

Άρα $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$

Ακριβώς ίδια όταν $x_n \rightarrow -\infty$

Θεώρημα: $x_n \rightarrow 0$, $x_n > 0$ τότε $\frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$
 $x_n < 0$ τότε $\frac{1}{x_n} \rightarrow -\infty$
τελικά

Απόδειξη: Έστω $x_n > 0$, $x_n \rightarrow 0$.
 Έστω $M > 0$ τυχού. τότε επειδή $0 < x_n \rightarrow 0$, έχω ότι $\exists n_0$ τ.ω. για
 $n \geq n_0$, $x_n < \frac{1}{M} = \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} > M \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$

Θεώρημα: Έστω $X_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα γ' φραγμένη.

Ανισότητα Bernoulli:

$$(1+a)^n \geq 1+na, \quad a \geq -1, \quad n=1,2,3,\dots$$

Απόδειξη: με επαγωγή

Τρίτη 21/10/2021

Θεώρημα: Η $X_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα γ' φραγμένη γ' άρα συγκλίνει

Απόδειξη: (i) $\frac{X_{n+1}}{X_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$

Επειδή έχω διαφέρει προτιμώ να πάρω ηχητικό

$\frac{X_{n+1}}{X_n} > 1$ αφού αύξουσα

$$= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} \left(1 - (n+1) \cdot \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$\boxed{a = -\frac{1}{(n+1)^2} \geq -1, \quad n \in \mathbb{N}}$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow X_n \uparrow$$

(ii) Η (X_n) φραγμένη

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{\text{Διωνυμικός ανάπτυγμα}}{\leq} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{\overbrace{(n-k+1)(n-k+2)\dots(n-k+k)}^{k \text{ όροι}}}{\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ όροι}}} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{< 1} \underbrace{\left(1 - \frac{k-2}{n}\right)}_{< 1} \dots \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}_{< 1} \cdot 1$$

$$< 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \quad \text{Αρκεί να δούμε } 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \text{ φραγμένο.}$$

Όμως $x_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} = (-1)^n n \not\rightarrow \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ (2)

! $\frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$

Ορίσμος: Η (x_n) αύξουσα αν $x_{n+1} > x_n \forall n$, $x_n \uparrow$
 γνησίως αύξουσα $x_{n+1} > x_n$ $x_n \uparrow$

• Αντίστοιχα ο ορίσμος της φθίνουσας ακολουθίας.

• Η (x_n) είναι μονότονη αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

Θεώρημα: Αν (x_n) αύξουσα και άνω φραγμένη τότε συγκλίνει.
 φθίνουσα κατω

Απόδειξη: Έστω $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Το A είναι άνω φραγμένο, άρα έχει $\sup A = s \in \mathbb{R}$. Θα δείξω ότι $x_n \rightarrow s$.
 Έστω $\varepsilon > 0$. Από χαρακτηριστική ιδιότητα του $\sup$ $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x_{m_0} > s - \varepsilon$.
 Επειδή $x_n \uparrow$ έχω ότι $x_n > s - \varepsilon \forall n \geq m_0$.

$$s - \varepsilon < x \leq s = \sup A < s + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x_n - s| < \varepsilon$$

Άρα, έχουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \exists m_0$ τ.ω. $|x_n - s| < \varepsilon \forall n \geq m_0$.

Συνεπώς $x_n \rightarrow s$

• Αν x_n αύξουσα αλλά όχι άνω φραγμένη, τότε $x_n \rightarrow +\infty$

Απόδειξη: Έστω $M > 0$. Επειδή x_n όχι άνω φραγμένη $\exists m_0$ τ.ω. $x_{m_0} > M$. Επειδή $x_n \uparrow \forall n \geq m_0$.

Άρα από τον ορίσμο $x_n \rightarrow +\infty$

Παρατηρώ: $k! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}_{(k-1) \text{ όροι}} > \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{k-1 \text{ όροι}} = 2^{k-1}$

Άρα $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$

Δηλαδή $1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} <$

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$

$< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$

Άρα αυξουσα η ανω φραγμένη. Συγκρίνει.

Άσκηση: (Να μελετηθεί ως προς τη σύγκριση)
Δ.ο. συγκρίνει η ακολουθία: $a_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ όροι}}$

μύνη: Ένας τρόπος είναι να ελέγξω εάν είναι μονότονη η φραγμένη.
Παρατηρώ ότι $\frac{1}{n+1}$ ο πιο μεγάλος όρος.

Δηλαδή $a_n < \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1}}_{n \text{ φορές}} = \frac{n}{n+1} < 1$

Επομένως η a_n ανω φραγμένη. Όμως a_n και κάτω φραγμένοι, γιατί όλοι οι όροι της θετικοί. Επομένως a_n φραγμένη.

Θα βρω τη μονοτονία. Επειδή έχω άθροισμα γι' όχι δυνάμεις θα πάρω τη διαφορά

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \cdots - \frac{1}{2n}$

$= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$

άρα $\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2}$

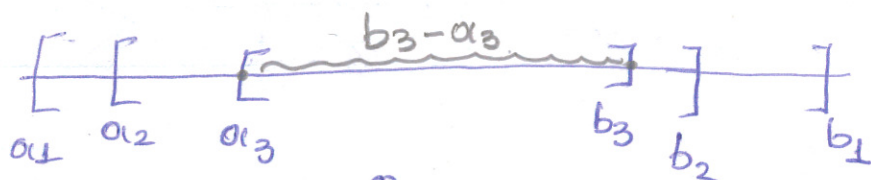
άρα $a_n \uparrow$.

Επομένως a_n συγκρίνει.

Θεώρημα Αρχή Κιβωτίων

Αδίκηση Έστω $[a_n, b_n]$ οικογένεια κλειστών διαστημάτων.

τ.ω $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$ και $b_n - a_n \rightarrow 0$
το μεγαλύτερο.



τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{l\}$ ένα σημείο, γιατί έχω κλειστά διαστήματα.
Εάν είχα ανοικτά δεν θα έμενε τίποτα γ' θα έμενε το κενό.

Απόδειξη: Η ακολουθία $(a_n) \uparrow$ και φραγμένη $(a_n \leq b_1 \leq b_1)$

Άρα συγκλίνει. $a_n \rightarrow a$

Με το ίδιο επιχείρημα $(b_n) \downarrow$ και κάτω φραγμένη $(b_n \geq a_1)$,
άρα $b_n \rightarrow b$.

Τα παραπάνω αποτελούν αποτέλεσμα παρατήρησης του παραπάνω σχήματος.

Ξέρω ότι $b_n - a_n \rightarrow b - a$ (από Ιδιότητες)

Όπως έχω $b_n - a_n \rightarrow 0$.

Επομένως $b - a = 0 \Rightarrow b = a = l$.

Θα δείξω ότι $l \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Επειδή $a_n \uparrow$ γ' συγκλίνει στο l .

Έχω ότι $a_n \leq l$. Επειδή $b_n \downarrow$ γ' συγκλίνει στο l έχω ότι $l \leq b_n$
 $\forall n$. $a_n \leq l \leq b_n \quad \forall n = 1, 2, \dots$

$\Leftrightarrow l \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow l \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

Θα δείξω ότι δεν υπάρχει άλλο σημείο στην τομή. Έστω ότι υπάρχει

σημείο $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, δηλαδή $a_n \leq x \leq b_n \quad \forall n$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $l \quad l \Rightarrow x = l$

πχ 1: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, \frac{1}{n} \right) = \emptyset$

Απόδειξη: Έστω ότι $\exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n} \right)$, τότε $0 < x < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Όμως παραβιάζει την αρχιμήδεια ιδιότητα

πχ 2: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{n} \right) = \{0\}$

πχ 3: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}$, αλλιώς δε συμβαίνει πάντα στα ανοικτά άνωρα

Υπακολουθίες

Ορισμός: Έστω (x_n) ακολουθία γ' $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ $k_n \geq n$
αίτερη ακολουθία φυσικών αριθμών. Τότε η $y_n = x_{k_n}$ λέγεται
υπακολουθία της x_n .

πχ: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{128}, \dots$
 $\underbrace{x_1}_{k_1=1}, \underbrace{x_3}_{k_2=3}, \dots, \underbrace{x_{128}}_{k_3=128}, \dots$

Οι όροι που κρατήσα φτιάχνουν υπακολουθία, εφόσον πληρούν στο αίτημα