Ανάλυση Ι

 Τρίτη 26/10/2021

Υπακολουθίες

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$

x_{k_1} ($n=1$, $k_1=2$), x_{k_2} ($n=2$, $k_2=4$), x_{k_3}

$k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n$

(x_{k_n}) υπακολουθία $k_n \geq n$

Πχ : $x_n = (-1)^n$, $x_{2n} = 1$, $x_{2n+1} = -1$

Μπορώ να επιλέξω $k=n$, δηλ. η (x_n) είναι υπακολουθία ταύτας

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$

$x_n \to \ell$ αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της (x_n) συγκλίνει στο ℓ

Απόδειξη : " $\Leftarrow$ " Αφού (x_n) υπακολουθία του εαυτού της άρα προφανές

" $\Rightarrow$ " Έστω $x_n \to \ell$. Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_0$ τ.ω. $|x_n - \ell| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

Έστω (x_{k_n}) τυχαία υπακολουθία. Επειδή $k_n \geq n$ έχω ότι

$|x_{k_n} - \ell| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0 \Rightarrow x_{k_n} \to \ell$

Χρήσιμο για να αποδεικνύουμε ότι κάποια ακολουθία δε συγκλίνει.

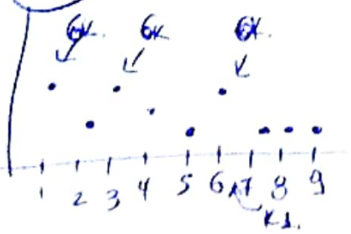
Πχ : η $x_n = (-1)^n$

$x_{2n} = 1 \to 1$ γι' $x_{2n+1} = -1 \to -1$ } Άρα η x_n δε συγκλίνει

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$: Κάθε ακολουθία έχει μονότονη υπακολουθία.

Απόδειξη ($\boxed{\text{Ορισμός}}$: Ο όρος x_n λέγεται σημείο κορυφής (σκ) αν $x_n \geq x_m$ $\forall m \geq n$)

$A = \{ n \in \mathbb{N} : x_n \text{ είναι σκ} \}$



Αν (x_n) τυχαία ακολουθία διακρίνω 2 περιπτώσεις (A πεπερασμένο ή A άπειρο)

(i) A πεπερασμένο. Έστω $k_1 \in \mathbb{N} > \max A$. Το k_1 δεν είναι σημείο κορυφής, άρα υπάρχει $k_2 > k_1$ τ.ω. $x_{k_2} > x_{k_1}$.
Όμως, τότε το x_{k_2} δεν είναι σκ, άρα $\exists k_3 > k_2$ τ.ω. $x_{k_3} > x_{k_2}$
κ.ο.κ., άρα έχω $(x_{k_n}) \uparrow$

(ii) A. άπειρο. Έστω $m_1 < m_2 < m_3 < \dots < m_n$ όλα $\in A$ γι' η υπακολουθία (x_{m_n})

$x_{m_1} > x_{m_2} > x_{m_3} \dots\dots$ άρα $(x_{m_n}) \downarrow$

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$ (Bolzano–Weierstrass)

Κάθε φραγμένη υπακολουθία θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη: Η ακολουθία έχει μονότονη ακολουθία που επειδή είναι φραγμένη συγκλίνει.

Ακολουθία Cauchy

$\boxed{\text{Ορισμός}}$: Μια ακολουθία (x_n) λέγεται Cauchy αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ τω $\forall n, m \geq n_0$

$|x_n - x_m| < \varepsilon$

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$: Η (x_n) Cauchy $\Longleftrightarrow$ η (x_n) συγκλίνει.

Απόδειξη: ("$\Leftarrow$") Έστω $x_n \to \ell$. Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_0$ τ.ω $|x_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_0$

άρα για $m \geq n_0$. έχω ότι $|x_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$, ~~άρα~~.

Όμως $|x_m - x_n| = |x_m - \ell - x_n + \ell| \leq |x_m - \ell| + |x_n - \ell|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

("$\Rightarrow$") Έστω x_n Cauchy.

(i) Η (x_n) είναι φραγμένη. Για $\varepsilon = 1$ $\exists n_0$ τ.ω $|x_n - x_{n_0}| < 1$ ($m = n_0$) $\forall n \geq n_0$

$|x_n| \leq 1 + |x_{n_0}|$ $\forall n \geq n_0$

Συνεπώς $|x_n| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_{n_0}|, 1 + |x_{n_0}|\}$ $n \geq 1$

(ii) Από B-W. υπάρχει υπακολουθία $x_{k_n} \to \ell$.

(iii) Όλη η ακολουθία $x_n \to \ell$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού x_n Cauchy $\exists n_1$ τ.ω $|x_n - x_m| < \varepsilon'$ όταν $n, m \geq n_1$. Επίσης, αφού $x_{k_n} \to \ell$ τότε για οποιοδήποτε ε'' $\exists n_2$ τ.ω $|x_{k_n} - \ell| < \varepsilon''$ $\forall n \geq n_2$.

Για $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχω ότι για $n \geq n_0$ τότε

$|x_n - \ell| = |x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - \ell| \leq$

$$\leq |\underbrace{x_n - x_{k_n}}_{<\varepsilon'}| + |\underbrace{x_{k_n} - \ell}_{<\varepsilon''}| < \varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon.$$

ως cauchy. για $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ κ' $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2}$

Άρα $x_n \to \ell$.

Πχ : $x_n = a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$, $|\lambda|<1$, $|a_n| \leq M$

Να μελετηθεί ως προς τη σύγκλιση.

λύση : Ελέγχω να δω αν είναι Cauchy.

$$|\underbrace{x_{k+n}}_{m} - x_n| = |\cancel{a_1\lambda} + \dots + a_{k+n}\lambda^{k+n} \cancel{- a_1\lambda - \dots - a_n\lambda^n}| =$$

$$= |a_{n+1}\lambda^{n+1} + \dots + a_{n+k}\lambda^{n+k}| \leq |a_{n+1}||\lambda|^{n+1} + \dots + |a_{n+k}||\lambda|^{k+n} \leq$$

$$\leq M|\lambda|^{k+1}\left(1 + |\lambda| + \dots + |\lambda|^{k-1}\right) = M|\lambda|^{n+1}\frac{1-|\lambda|^k}{1-|\lambda|} <$$

$$< \frac{M|\lambda|^{n+1}}{1-|\lambda|} \to 0 \text{ άρα } < \varepsilon \text{ για } n \geq n_0$$

Η x_n λοιπόν είναι Cauchy, άρα συγκλίνει.

$\Phi_1/1$

$A = \left\{\frac{n}{n+1}, n\in\mathbb{N}\right\}$ (i) $0 < \frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (από παρατήρηση)

Συνεπώς το A είναι άνω γ' κάτω φραγμένο.

(ii) $\boxed{\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\} \text{ (πρόχειρο)}}$

Παρατηρώ ότι $\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$ $\left(\Leftrightarrow n \geq n+1 \Leftrightarrow n \geq 1\right)$ Άρα $\frac{1}{2}$ είναι κάτω φράγμα που ελαχιστοποιείται όταν $n=1$, δηλαδή το A έχει min με $\min A = \frac{1}{2}$. Άρα $\inf A = \frac{1}{2}$.

Ισχυρίζομαι ότι $\sup A = 1$. (από $\frac{n}{n+1} < 1$, έχω ότι $\sup A \leq 1$)

Έστω ότι $(\sup A < 1)$ $\sup A = 1-\theta$, για κάποιο $\theta > 0$. Τότε θα έχω ότι

$$\frac{n}{n+1} \leq 1-\theta \quad \forall n \Leftrightarrow \theta \leq 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άτοπο! Παραβιάζει αρχιμήδεια ιδιότητα.

Αν υπήρχε max θα ήταν 1, άρα θα $\exists n$, $\frac{n}{n+1} = 1 \Leftrightarrow n = n+1 \Leftrightarrow 1 = 0$. άτοπο

$\Phi_1/4$

A, B, $A-B = \{a-b : a\in A, b\in B\}$. Δ.ο. $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$

(i) ("$\leq$") $\forall a\in A, b\in B$, $a \leq \sup A$, $b \geq \inf B \Rightarrow$

$$-b \leq -\inf B$$

$$\frac{(+)}{a - b \leq \sup A - \inf B}$$

αριθμός άνω φράγμα

$$\Downarrow$$

$$\sup(A-B) \leq \sup A - \inf B$$

Ελάχιστο άνω φράγμα

(ii) ("$\geq$") $\exists a \in A$ τ.ω., $\exists b \in B$ τ.ω.

$\sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a$

$\inf B + \frac{\varepsilon}{2} > b \Rightarrow -\inf B - \frac{\varepsilon}{2} < -b$

$$\left.\begin{array}{l} \sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a \\ -\inf B - \frac{\varepsilon}{2} < -b \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} \sup A - \inf B - \varepsilon < a - b \Rightarrow \sup A - \inf B - \varepsilon < \sup(A-B)$$

$\forall \varepsilon > 0$.

Όμως $\sup A - \inf B \le \sup(A-B)$.

$\Phi_2/1$

$x, y > 0, \quad x < \delta y, \quad \forall \delta > 10 \Rightarrow x \le 10y$

λύση: Με άτοπο!

Έστω $x > 10y \Leftrightarrow \frac{x}{y} > 10$. Επιλέγω $\delta = \frac{x}{y}$ (>10)

Άρα πρέπει να ισχύει $x < \frac{x}{y} y \Rightarrow x < x$ Άτοπο!

$\Phi_2/4$

$a_n \to 1, \quad b_n \to 2$

(i) $\exists n_0 : b_n \geq a_n, \ n \geq n_0$.

(ii) $\exists n_1 : a_n - b_n > \frac{1}{2}, \ n \geq n_1$

λύση (ii): Για $\varepsilon = 1/4$ $\exists n_0$ τ.ω. $|a_n - 1| < 1/4$, $n \geq n_0$

και $\exists n_0'$ τ.ω. $|b_n - 1| < 1/4$, $n \geq n_0'$

Άρα $n \geq n_1 = \max(n_0, n_0')$, έχω $|a_n - 1| < \frac{1}{4}$, $|b_n - 2| < 1/4$

$$\text{Άρα}\quad \left.\begin{array}{l} -\frac{1}{4} < a_n - 1 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} < a_n < \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} < b_n - 2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{4} < b_n < \frac{9}{4} \end{array}\right\} \frac{1}{2} < b_n - a_n < \frac{3}{2}$$

$\Phi_3/4$

$1 \le a_1 \le 2, \quad a_{n+1}^2 = 3a_n - 2, \quad a_n > 0, \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$

λύση: Επαγωγικά θα δείξω ότι $1 \le a_n \le 2$ (Φραγμένη ακολουθία)

Στη συνέχεια θα δείξω ότι (a_n) μονότονη $(a_{n+1}^2 - a_n^2)$

$\Phi_{3/3}$

Α' τρόπος

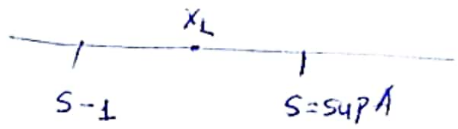
$\exists\, x_n \uparrow \sup A$, $x_n \in A$

λύση: $s-1 < a_1 \overset{\in A}{} \leq s$ (από χαρ ιδιότητα του sup)

$s - 1/2 < a_2 \overset{\in A}{} \leq s$

$\vdots$

$s - 1/n < a_n \leq s$



Η ακολουθία που θέλω είναι η x_n.

$x_1 = a_1$

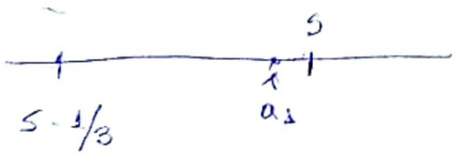
$x_2 = \max\{a_1, a_2\}$.

$\vdots$

$x_n = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Έφτιαξα την υπακολουθία x_n.

Αφού η a_n (ακολουθία) συγκλίνει, άρα κ' η υπακολουθία x_n συγκλίνει

Β' τρόπος



Πάλι χαρακτηριστική ιδιότητα του sup.

$s = \delta$

$\delta = \min\left(\frac{1}{2}, s - a_1\right)$

$\vdots$

$\delta = \min\left(\frac{1}{n}, s - a_n\right)$

$\Phi_{3/2}$

$x_n > 0$, $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = l > 1 \rightarrow \lim x_n = +\infty$

λύση (i) Ισχυρίζομαι ότι $\exists n_0$ τ.ω. $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1+\theta$, για κάποιο $\theta > 0$ και για $n \geq n_0$.
(θέλει απόδειξη) Με χρήση ορισμού του ορίου.

(ii) $x_n = x_{n_0} \underbrace{\left(\frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}}\right)}_{\geq 1+\theta} \cdots \underbrace{\left(\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\right)}_{\geq 1+\theta} \underbrace{\left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)}_{\geq 1+\theta} \geq x_{n_0}(1+\theta)$ 　 $\boxed{\text{Πλήθος}^{\#} = n - n_0}$

$$= \frac{X_{n_0}}{(1+\theta)^{n_0}} \cdot (1+\theta)^n$$

Έχω δηλαδή $X_n \geq \underbrace{\frac{X_{n_0}}{(1+\theta)^{n_0}}}_{\text{σταθ}} \cdot \underbrace{(1+\theta)}_{\text{σταθ}}{}^{n}$ ← τρέχει

Όσο η ~~μ~~ μεγαλώνει το $(1+\theta)^n \to +\infty$ γιατί $1+\theta > 1$

Επομένως $\frac{X_{n_0}}{(1+\theta)^{n_0}} \cdot (1+\theta)^n \to \infty$.