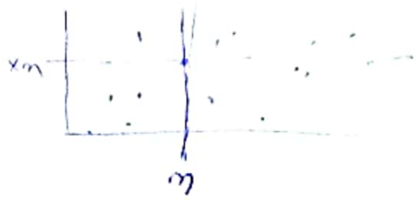
Ανάλυση Ι

Τρίτη 9/11/2021 ①

lim inf κ' lim sup

Έστω (x_n) φραγμένη κ' $L_n = \inf\limits_{k \geq n} x_k$ (ακολουθία), η $L_n \uparrow$ (αύξουσα) κ' φραγμένη



$U_n = \sup\limits_{k \geq n} x_k$, η $U_n \downarrow$ (φθίνουσα) κ' φραγμένη.

Επίσης έχω ότι $L_n \leq x_n \leq U_n$.

$$\boxed{A \subset B \rightarrow \begin{cases} \inf A \geq \inf B \\ \sup A \leq \sup B \end{cases}}$$

Η L_n συγκλίνει κ' το όριο λέγεται $\liminf x_n$ ή $\underline{\lim}\, x_n$ $= \lim L_n$

U_n συγκλίνει κ' το όριο λέγεται $\limsup x_n$ ή $\overline{\lim}\, x_n$ $= \lim U_n$.

$\in \mathbb{R}$ αριθμοί.

Για κάθε ακολουθία (x_n) φραγμένη το $\overline{\lim}\, x_n$ κ' $\underline{\lim}\, x_n$ υπάρχουν ΠΑΝΤΑ και $\in \mathbb{R}$.

Αν (x_n) όχι άνω φραγμένη τότε λέμε $\limsup x_n = +\infty$

κάτω $\liminf x_n = -\infty$

Θεώρημα: Έστω (x_n) φραγμένη κ' x_{k_n} τυχαία συγκλίνουσα υπακολουθία, δηλ. $x_{k_n} \to l$, τότε $\liminf x_n \leq \lim x_{k_n} \leq \limsup x_n$ ①

Απόδειξη:

$$\inf_{k \geq n} x_k \leq x_{k_n} \leq \sup_{k \geq n} x_{k_n}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\lim x_n \qquad \lim x_{k_n} = l \qquad \limsup x_n$$

Θεώρημα: Έστω (x_n) φραγμένη κ' $\liminf x_n = \limsup x_n = \ell$, τότε x_n συγκλίνει στο ℓ.

Απόδειξη: Από ① κάθε συγκλίνουσα υπακολουθία έχει όριο το ℓ, άρα $x_n \to \ell$.

Θεώρημα: Έστω (x_n) φραγμένη. Τότε υπάρχουν υπακ. $\begin{cases} x_{k_n} \to \limsup x_n \\ \text{και} \\ x_{m_n} \to \liminf x_n \end{cases}$

Απόδειξη: Βλέπε σημειώσεις.

Άσκηση/Θεώρημα: Έστω (x_n), (y_n) φραγμένες ακολουθίες, με $x_n \le y_n$

Τότε: $\overline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, y_n$ ② κ' $\underline{\lim}\, x_n \le \underline{\lim}\, y_n$

Απόδειξη: Για $k \ge n$ έχω ότι $x_k \le y_k$.

Θα δείξω το ②

$$x_k \le y_k \le \sup_{k \ge n} y_k$$ (για n = σταθεροποιημένα είναι αριθμός)

$$\Longrightarrow \sup_{k\ge n} x_k \le \sup_{k \ge n} y_k \Longrightarrow$$

$$U_n(x_n) \le U_n(y_n)$$

$$\Longrightarrow \lim \sup_{k \ge n} x_k \le \lim \sup_{k\ge n} y_k$$

$$\Longrightarrow \limsup x_n \le \limsup y_n.$$

Παρόμοια αποδεικνύεται και η $\underline{\lim}\, x_n \le \underline{\lim}\, y_n$

Άσκηση: Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία κ' $y_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

Δ.ο. $\underline{\lim}\, x_n \overset{(1)}{\le} \underline{\lim}\, y_n \overset{(2)}{\le} \overline{\lim}\, y_n \overset{(3)}{\le} \overline{\lim}\, x_n$.

Λύση: Η (2) είναι προφανής. Θα δείξουμε την (3) (η (1) με την ίδια λογική)

Έστω ότι $\overline{\lim}\, x_n = u$. Τότε $\exists n_0$ τ.ω. $\underbrace{\sup_{k\ge n} x_k}_{U_n} < u + \varepsilon$, $\forall n \ge n_0$ $(U_n \to u)$

Επομένως για $n \ge n_0$

$$y_n = \frac{x_1 + \dots + x_{n_0 - 1}}{n} + \frac{x_{n_0} + \dots + x_n}{n}$$

Πλήθος όρων = μεγαλύτερος όρος − μικρός όρος + 1

$$y_n = \frac{x_1+\dots+x_{n_0-1}+x_{n_0}+\dots+x_n}{n} \le \frac{x_1+\dots+x_{n_0-1}}{n} + (u+\varepsilon)\frac{n-n_0+1}{n} \quad (4)$$

(*)Δεν μπορώ να πάρω όρια στα 2 μέλη, γιατί δεν ξέρω εάν υπάρχει το $\lim y_n$

Στην (4). παίρνω limsup (όχι lim, δεν ξέρω αν υπάρχει, ενώ το limsup υπάρχει πάντα) γ' χρησιμοποιώ την προηγούμενη άσκηση/Θεώρημα)

$\limsup y_n \le \limsup$ (δεξί μέλος της (4)) $= \lim_{n\to+\infty}$ (του δεξιού μέλους)

$= u+\varepsilon$

Άρα έχω ότι $\limsup y_n \le u+\varepsilon \quad \forall \varepsilon>0$.

$\Rightarrow \limsup y_n \le u$.

Παρατήρηση: Αν η x_n συγκλίνει $(x_n\to l)$ (έχω ότι είναι γ' φραγμένη η (x_n))

τότε $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = l$

$\Rightarrow \underline{\lim} y_n = \overline{\lim} y_n = l \Rightarrow y_n \to l$

Σειρές Πραγματικών Αριθμών

(a_n) ακολουθία. Ορίζω ακολουθία μερικών αθροισμάτων $S_n = a_1+\dots+a_n$

Αν $S_n\to S$ λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο S.

- Αν $|a|<1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} a^n = \lim_{k\to+\infty} \frac{1-a^{k+1}}{1-a} \longrightarrow \frac{1}{1-a}$

Γεωμετρική Σειρά

- $a_n = (-1)^n \rightsquigarrow -1, 1, -1, 1, \dots$

$S_1 = -1$, $S_2 = -1+1 = 0$, $S_3 = -1$, $S_4 = 0$, ...

$S_{\text{άρτιο}} \to 0$

$S_{\text{περιττό}} \to -1$

Άρα η S_n δε συγκλίνει, συνεπώς η $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ δε συγκλίνει.

Scanned with CamScanner

(*) **Θεώρημα**: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Longrightarrow a_n \to 0$ (*) Το αντίστροφο **ΔΕΝ** ισχύει

Απόδειξη: $S_n \to S$, $S_{n+1} \to S$. $\xrightarrow{a_{n+1}=} S_{n+1} - S_n \to 0$.

(*) **Θεώρημα**: Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$.

$\sum_{n+1}^{\infty} a_k$ ουρά της σειράς)
||
από ένα δείκτη κ' μετά

Πέμπτη 4/11/2021

Θεώρημα: Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$

Απόδειξη: Για $m>n$ έχω ότι $\sum_{k=n+1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k$

Τώρα στέλνω το $m \to \infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0$$

Θεώρημα: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b$

Θεώρημα: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει <u>αν</u> $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$.

τω $\forall m > n \geq n_0 \quad |a_{n+1} + \dots + a_m| < \varepsilon$

Απόδειξη: Εφαρμόζω Κριτήριο Cauchy στην $S_n = a_1 + \dots + a_n$

π.χ.: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

Αν συνέκλινε, θα είχα ότι για π.χ.: $\varepsilon = 1/2$ θα $\exists n_0$
τω για $m > n \geq n_0$.

$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{m}<\frac{1}{2}$ Επιλέγω $m=2n$

Λόγω Cauchy

$\hookrightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}>n\,\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$ Άτοπο!

Πχ: Η $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει

Έστω $\varepsilon>0$ για $n\geq n_0(\varepsilon)$

Στη συνέχεια θα δω τι θα πάρω για n_0.

$$|a_{n+1}+\dots+a_m|=\frac{1}{(n+1)^2}+\dots+\frac{1}{m^2}<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots+\frac{1}{(m-1)m}=$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\cancel{\frac{1}{n+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\cancel{\frac{1}{n+2}}\right)+\dots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}$$

$$<\frac{1}{n}<\varepsilon \quad , n>\frac{1}{\varepsilon}$$

Πχ: πάρε $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$

Σειρές με μη αρνητικούς όρους ($a_n\geq 0$)

Τότε η $S_n\uparrow$ γν. συνήθως αν $S_n<M$ (φραγμένη) τότε η σειρά συγκλίνει. Αν όχι φραγμένη. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=+\infty$.

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$: $0\leq a_n\leq b_n$

Αν $\sum b_n$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum a_n$ συγκλίνει

$\sum a_n\to+\infty \Rightarrow \sum b_n\to+\infty$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\ell \quad \text{ή} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\xrightarrow{n\to\infty}\ell\right)$$

Άσκηση: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p>1$ συγκλίνει ($0<p\leq 1$ αποκλίνει)

$$S_{2^{n+1}-1} = 1 + \overbrace{\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)}^{2^{ος} \text{ όρος}} + \left(\frac{1}{4^p}+\dots+\frac{1}{7^p}\right) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{1}{(2^n)^p}+\dots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^p}\right) <$$

$$< 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{2^2}{2^{2p}} + \dots + \frac{2^n}{2^{np}} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{2(p-1)}} + \dots + \frac{1}{2^{n(p-1)}} =$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}} < \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}}$$ άρα φραγμένη η $S_{2^{n+1}-1}$

Όμως $S_n < S_{2^{n+1}-1} < M$, άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $p>1$ συγκλίνει

Βασική Σειρά (τη θυμόμαστε)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \quad (*)$$

Ας θυμηθούμε το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$, για $x=1$ παίρνω την $(*)$

Θεώρημα: Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης

$a_n \geq 0$, $b_n > 0$ $\frac{a_n}{b_n} \to l$, $l>0$. (απόδειξη απλή)

$\sum a_n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ συγκλίνει

• $\sum \frac{1}{n}$ αποκλίνει, $\sum \frac{4}{6n^2+4}$, $\frac{a_n}{b_n} = \frac{6n^2+4}{n \cdot n} = \frac{6n+4}{n^2} \to 6 > 0$

$\quad \| $

$\quad a_n$

άρα γ' η $\sum \frac{n}{6n^2+4}$ αποκλίνει

• $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+10}{n^2-2}$

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2+1} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{αλλά } 3/2 \to 1$$

$$\frac{\frac{\sqrt{n}+10}{n^2-2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} \to 1, \quad \text{άρα } \frac{\sqrt{n}+10}{n^2-2} \text{ συγκλίνει}$$

Θεώρημα: Κριτήριο Λόγου

Αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$. Τότε $\ell < 1 \to \sum a_n$ συγκλίνει
$\ell > 1 \to \sum a_n$ αποκλίνει

Θεώρημα: Κριτήριο Ρίζας

Αν $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$. Τότε $\ell < 1 \to \sum a_n$ συγκλίνει
$\ell > 1 \to \sum a_n$ αποκλίνει

Απόδειξη: Κριτηρίου Ρίζας.

• $\ell < 1$ Επιλέγω $\varepsilon_0 > 0$ τ.ω $\ell + \varepsilon_0 < 1$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\ell + \varepsilon_0 <$

Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ για $n \geq n_0$. $\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon_0 \Rightarrow a_n < (\ell + \varepsilon)^n$

Γνωρίζω ότι η $\sum (\ell + \varepsilon)^n$ συγκλίνει ως γεωμετρική, άρα από κριτήριο σύγκρισης $\sum a_n$ συγκλίνει.

Παρατήρηση (Για κριτήριο σύγκριση)

$a_n \le b_n$ αρκεί να το έχω τελικά, δηλ από ένα δείκτη κι' μετα

Πχ 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ Κριτήριο λόγου. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!} = \frac{\cancel{(n+1)}}{(n+1)^{n+1}} n^n =$

$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$ άρα συγκλίνει

Πχ 2: $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ Κριτήριο ρίζας.

$\sqrt[n]{a_n} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\right)^{1/n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$

άρα συγκλίνει

Scanned with CamScanner