Ανάλυση Ι

Τρίτη 9/11/2021

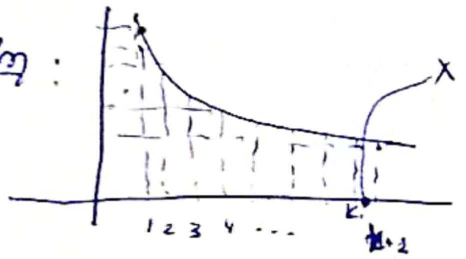
Σειρές με μη αρνητικούς όρους

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$: (Κριτήριο Ολοκληρώματος):

$f:[1,\infty)\to\mathbb{R}^+$ συνεχής, φθίνουσα γ' ≥ 0, τότε η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει ανν $x_n=\int_1^n f(x)\,dx$ συγκλίνει.

Απόδειξη:



$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

η σύγκλιση της σειράς είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση της S_n

$$f(k+1)\leq f(x)\leq f(k),\ x\in[k,k+1]\ \forall x\in[1,\infty)$$

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx\leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx\leq \int_k^{k+1} f(k)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(k+1)\leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx\leq f(k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(k+1)\leq \sum_{k=1}^{n}\int f(x)\,dx\leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Ξεκινάω από το k+1 άρα δεν έχω τον όρο για 1

$$S_{n+1}-f(1)\leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx\leq S_n$$

$x_n\uparrow$ γ' $S_n\uparrow$ Εξασφαλίζει τη θετικότητα της f

Δηλαδή $S_{n+1}-f(1)\leq x_n\leq S_n$

Αν S_n συγκλίνει είναι φραγμένη $\Rightarrow$ η x_n είναι φραγμένη
Όμως είναι γ' αύξουσα (x_n), άρα συγκλίνει.

Αν x_n συγκλίνει, τότε η x_n είναι φραγμένη, άρα και η S_n είναι φραγμένη γ' επειδή αύξουσα $\uparrow$ συγκλίνει

Πχ 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Έστω $f(x)=\frac{1}{x}$, $\sum \frac{1}{n}$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$ συγκλίνει

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \ln n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

Πχ 2: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p>0$, $f(x)=\frac{1}{x^p}$ ίδια συμπεριφορά με $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \left[\frac{1}{-p+1}\,\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^n = \frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & <\infty \quad (p>1) \\ +\infty, & 0<p<1 \end{cases}$$

Θεώρημα (Κριτήριο Συμπύκνωσης Cauchy)

$0 \le a_n$, $a_n \downarrow$. Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{n} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει

απόδειξη: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\quad t_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$

Ορίζω $S_{2^{n+1}-1} = \overbrace{(a_1)}^{2^0} + \overbrace{\underbrace{(a_2+a_3)}_{\le 2a_2}}^{2^1} + \overbrace{\underbrace{(a_4+a_5+a_6+a_7)}_{\le 4a_4 = 2^2 a_{2^2}}}^{2^2} + \dots + \overbrace{\underbrace{(a_{2^n}+a_{2^n+1}+\dots a_{2^{n+1}-1})}_{2^n a_{2^n}}}^{2^n}$

Εφόσον φθίνει, ο πρώτος όρος κάθε παρένθεση είναι ο πιο <u>μεγάλος</u>

Άρα $\rightarrow S_{2^{n+1}-1} \le t_n$

$S_{2^{n+1}} = a_1 + a_2 + (a_3+a_4) + (a_5+\dots+a_8) + \dots$ κάνω αλλιώς το γκρουπάρισμα.

Τώρα σε κάθε παρένθεση ο τελευταίος όρος θα είναι δύναμη του 2.

Άρα είναι

$\ge a_1 + a_2 + 2a_4 + \overset{2^2}{4} a_8 + \dots + 2^n a_{2^{n+1}}$ Πάλι ήθελα να εμφανίσω το t_n

$= \frac{1}{2}\left(2a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \dots + 2^{n+1} a_{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}(a_1 + t_{n+1})$

Scanned with CamScanner

Άρα πλέον έχω. $S_{2^{m+1}} - 1 \leq t_m$ ή $S_{2^{m+1}} \geq \frac{1}{2}(a_1 + t_{m+1})$

Όπως πριν, έστω t_m συγκλίνει. άρα φραγμένη $\Longrightarrow S_{2^{m+1}}$ φραγμένη.

$\Longrightarrow S_m < S_{2^{m+1}}$ φραγμένη άρα ↑ άρα συγκλίνει. //

Πχ: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$

Ξέρω
Για $n \to \infty$ $\ln n^p < n^p. \Rightarrow$
$\frac{1}{(\ln n)^p} > \frac{1}{n^p}$

άρα για $p \leq 1$ έχω απόκλιση →

Με Cauchy:

Μπορώ να χρησιμοποιήσω
Κριτήριο Συμπύκνωσης Cauchy
Κριτήριο Ολοκληρώματος

Ελέγχω την $\sum 2^n a_{2^n} =$

$= \sum \frac{2^n}{(\ln 2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^p (\ln 2)^p} =$

$= \frac{1}{(\ln 2)^p} \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^p}}$ ← Πρέπει να την ελέγξω.

Κάνω κριτήριο Ρίζας $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{2^n}{n^p}\right)^{1/n} =$

$= \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^p} \longrightarrow 2 \cdot 1 = 2 > 1$

άρα αποκλίνει.

Άρα η σειρά αποκλίνει $\forall p > 0$.

Σειρές Όρων με αυθαίρετα πρόσημα

Ορισμός: Η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει <u>απολύτως</u> αν η $\sum |a_n|$ συγκλίνει.

Θεώρημα: Αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 τ.ω. $\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$ $\forall n > m \geq n_0$

(Επειδή είναι Cauchy)

άρα και $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$

Συνεπώς και η $\sum_{k=1} a_k$ είναι Cauchy, άρα συγκλίνει

Όμως: Υπάρχουν σειρές $\sum a_n$ που συγκλίνουν, ενώ η $\sum |a_n|$ δέν συγκλίνει.
τότε λέμε ότι η $\sum a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη

Πχ: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ η $\sum \frac{1}{n}$ δε συγκλίνει

$$S_{2n} = \underbrace{1 - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} \quad \frac{\text{ξεχωρίζω}}{\text{ανά } 2.} \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2^n-1)2^n}$$

$$< \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2^{n-1})^2} < +\infty$$ Πεπερασμένη γν. αύξουσα
άρα συγκλίνει

Ελέγχω. $S_{2n+1} = \overset{\text{άρτιοι}}{S_{2n}} + \overset{\text{περιττοί}}{a_{2n+1}} \to l$,

$S_{2n} \to l$, $a_{2n+1} \to 0$

Άρα $S_n \to l$, δηλαδή συγκλίνει

Συνεπώς η $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

Πρόοδος 6 Δεκεμβρίου. Δευτέρα 5-7.