Ανάλυση Ι

Πρόγραμμα Πέμπτη 18 δεν θα γίνει μάθημα
Τρίτη-Πέμπτη 23 γ' 25 Τερτίκας
Τρίτη 30 δε θα γίνει μάθημα

Σειρές με γενικούς (όχι σταθερού προσήμου) όρους

- Αν $\sum |a_n|$ συγκλίνει $\longrightarrow$ $\sum a_n$ συγκλίνει γ' μάλιστα απόλυτα.
- Αν $\sum a_n$ συγκλίνει αλλά η $\sum |a_n|$ όχι, λέμε ότι η $\sum a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη

πχ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει υπό συνθήκη.

Θεώρημα: (Κριτήριο Dirichlet)
Έστω a_n, b_n ακολουθία τ.ω η $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ είναι φραγμένη γ' η b_n φθίνοντας στο 0. Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει

Απόδειξη: Θα δείξω ότι η σειρά ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy, δηλαδή ότι το $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right|$ γίνεται όσο μικρό θέλω για $m > n \geq n_0$.

Έχω $|S_n| < M$ $\forall n$. Έστω $\varepsilon > 0$. $\exists n_0$ τ.ω για $n \geq n_0$, $0 \leq b_n < \varepsilon$.

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} (S_k - S_{k-1}) b_k\right| \overset{(*)}{=} \cdots\cdots =$$

(*) $S_k = a_1 + \cdots + a_k$
$S_{k-1} = a_1 + \cdots + a_{k-1}$

$$= \left|\sum_{k=n+1}^{m-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_m b_m - S_n b_{n+1}\right|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m-1} |s_k||b_k - b_{k+1}| + |s_m b_m| + |s_n b_{n+1}| \leq$$

$$\leq M \sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) + M\varepsilon + M\varepsilon < 4M\varepsilon$$

$$\sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) = b_{n+1} - b_m$$

άρα είναι Cauchy

Πχ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad a_n = (-1)^n \quad |s_n| \leq 1$

$b_n = \frac{1}{n}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, \; p > 0.$

Διδακτική Άσκηση

Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση για τις διάφορες τιμές του $p>0$.

$\sum a_n \quad , \; a_n = \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n} = (-1)^n b_n$

για να είναι φθίνουσα πρέπει: $b_{2k} \geq b_{2k+1}$ και $b_{2k-1} \geq b_{2k}$.

Ελέγχω $b_{2k} > b_{2k+1} \iff \frac{1}{(2k)^p + 1} > \frac{1}{(2k+1)^p - 1} \iff (2k+1)^p - 1 > (2k)^p + 1$

πχ: $p = 1 \rightarrow 2k > 2k+1$? ΟΧΙ

Μπορώ όμως να αποδείξω ότι όταν $p>1$ ισχύει.

έχω:

$$(2k+1)^p = (2k)^p \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^p \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} (2k)^p \left(1 + \frac{p}{2k}\right) = (2k)^p + \underbrace{p(2k)^{p-1}}_{>1} > (2k)^p + 1$$

Ανάλογα μπορώ να δείξω ότι $b_{2k-1} \geq b_{2k}$

Επομένως η $b_n \downarrow$ για $p>1$. Συνεπώς για $p>1$ έχω σύγκλιση της σειράς από το κριτήριο Dirichlet.

Τι συμβαίνει για $0<p<1$?

Δουλεύω διαφορετικά.

$$b_n = \frac{1}{n^p + (-1)^n} = \frac{n^p - (-1)^n}{n^{2p}-1} \quad \text{και} \quad \sum (-1)^n b_n =$$

$$= \sum \left(\frac{(-1)^n n^p}{n^{2p}-1} - \frac{1}{n^{2p}-1} \right) \quad (1)$$

Ελέγχω τη σειρά $\sum \frac{(-1)^n n^p}{n^{2p}-1}$ είναι η $c_n = \frac{n^p}{n^{2p}-1}$ φθίνουσα;

$f(x) = \frac{x^p}{x^{2p}-1}$ είναι φθίνουσα

$$f'(x) = \frac{p x^{p-1}(x^{2p}-1) - 2p x^{2p-1} x^p}{(x^{2p}-1)^2} = \frac{-p x^{3p-1} - p x^{p-1}}{(x^{2p}-1)^2} < 0 \quad \forall p>$$

Συνεπώς στην (1) η σειρά $\sum \frac{(-1)^n n^p}{n^{2p}-1}$ συγκλίνει $\forall p>0$.

Άρα η $\sum (-1)^n b_n$ συγκλίνει <u>ανν</u> συγκλίνει η $\sum \frac{1}{n^{2p}-1}$, δηλ. πρέπει $p > 1/2$

<u>Αναδιατάξεις</u>

$\sum a_n \quad \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Η $\sum a_{\tau(n)}$ είναι αναδιάταξη της a_n

πχ: $\tau(1) = 10$
$\tau(2) = 3561$
$\tau(3) = 10^{10}$
$\tau(4) = 5$

$\boxed{\text{Ερώτημα}}$: Αν η $\sum a_n$ συγκλίνει τότε η $\sum a_{\tau(n)}$ συγκλίνει;

$\boxed{\text{Απάντηση}}$: Όχι απαραίτητα

Θεώρημα: Έστω ότι η $\sum a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Αν δε $\mathbb{R}$ τυχαίος αριθμός, τότε υπάρχει αναδιάταξη που συγκλίνει στο S.

Γινόμενο Σειρών:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \;,\; \sum_{n=0}^{\infty} b_n \qquad a_n * b_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k} b_k$$

Η $\sum a_n * b_n$ είναι το γινόμενο των $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

$$(a_0+a_1+a_2+\dots)(b_0+b_1+b_2+\dots)$$

$$\underbrace{(a_0 b_0)}_{a_0 * b_0} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{a_1 * b_1} + \underbrace{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{a_2 * b_2} + \dots$$

Θεώρημα: Αν $\sum a_n \to a$ και $\sum b_n \to b$ απολύτως, τότε και $\sum a_n * b_n \to ab$ απολύτως.

Πρόοδος Μέχρι Εδώ