Ανάλυση Ι ① Τρίτη 23/11/2021

$\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ γ' $f: A \to \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Ορισμός}}$: $\alpha \in \mathbb{R}$ μεμονωμένο σημείο του A (μοναχικό) όταν $\exists \varepsilon > 0$ ώστε

$$(A \setminus \{\alpha\}) \cap (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) = \phi$$

— η άρνηση θα είναι $\forall \varepsilon > 0$ $(A \setminus \{\alpha\}) \cap (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \neq \phi$

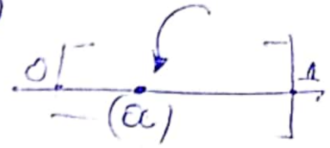
$\boxed{\text{Ορισμός}}$: Το α είναι σημείο συσσώρευσης (σ.σ.) του A όταν $\forall \varepsilon > 0$

$$(A \setminus \{\alpha\}) \cap (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \neq \phi$$

Πχ 1: $A = (0,1)$. Ποια είναι σ.σ. γ' ποια μεμονωμένα σημεία.

Λύση: Κάθε σημείο $\alpha \in (0,1)$ είναι σ.σ. του $(0,1)$

Επίσης τα 0 γ' 1 είναι σ.σ. στο $(0,1)$



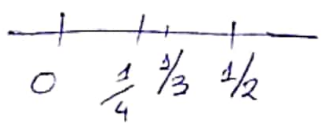
Όλα τα σημεία του $[0,1]$ είναι σ.σ. του $(0,1)$

Όλα τα $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ είναι μεμονωμένα σημεία για το $(0,1)$

Πχ 2: Έστω $A = \{1/n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Ποια είναι τα σ.σ. του A γ' ποια τα μεμονωμένα.

Λύση: 0 είναι σ.σ. του A $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$, $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap A = \phi$.

Άρα $\exists n \in \mathbb{N}$ $1/n \in A$ ~ $0 < 1/n < \varepsilon$



$$\varepsilon = 1/n - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$(A \setminus \{1/n\}) \cap \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \phi.$$

$\boxed{\text{Πρόταση}}$: Το $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι σ.σ. του $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ανν $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{\alpha\}$ τ.ω. $\lim a_n = a$.

Απόδειξη: "$\Longrightarrow$" Έστω το α σ.σ. του A ώστε $\forall \varepsilon>0$ $(A\setminus\{\alpha\})\cap(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)\neq\phi$.

Επιλέγω $n\in\mathbb{N}$ $\varepsilon=1/n$ $a_n\in(A-\{\alpha\})\cap(\alpha-1/n,\alpha+1/n)\neq\phi$

Όμως $\alpha-\frac{1}{n}<a_n<\alpha+\frac{1}{n}$

Απο κρ. παρεμβολής. $\lim_{n\to+\infty}\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\alpha-\frac{1}{n}\right)=\alpha \rightsquigarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty}a_n=\alpha}$

"$\Longleftarrow$" Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A\setminus\{\alpha\}$ γ' $\lim a_n=\alpha$.

Θα αποδ. οτι το α Είναι σ.σ. του A.

$\forall\varepsilon>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N} \rightsquigarrow |a_n-\alpha|<\varepsilon$ $n\geq n_0$ $\Longleftrightarrow$

$-\varepsilon<a_n<\varepsilon \Longleftrightarrow \alpha-\varepsilon<a_n<\alpha+\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$

Όριο Συνάρτησης: $\phi\neq A\subseteq\mathbb{R}$

Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ γ' α. σ.σ. του A.

Θα λέμε $\lim_{x\to\alpha}f(x)=l$, $l\in\mathbb{R}$, όταν $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\delta(\varepsilon,\alpha)>0$ ώστε $\forall x\in A$ $0<|x-\alpha|<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$

·Αντίστοιχα: $\lim_{x\to\alpha}f(x)=+\infty$, $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta \rightsquigarrow 0<|x-\alpha|<\delta$, $x\in A$ $\Rightarrow f(x)\geq 1/\varepsilon$.

. $\lim_{x\to\alpha}f(x)=-\infty$, $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0 \rightsquigarrow (\forall x\in A$ $0<|x-\alpha|<\delta)\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)\leq-1/\varepsilon$.

πχ: $A=\mathbb{R} \rightsquigarrow \lim_{x\to\alpha}x^3=\alpha^3$

Ανάλυση Προβλήματος

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0. \rightsquigarrow 0<|x-\alpha|<\delta\Longrightarrow|x^3-\alpha^3|<\varepsilon$.

– αρχικά διαλέγω $\delta=1$.

$x^3-\alpha^3=(x-\alpha)(x^2+x\alpha+\alpha^2)$

$|x^3-\alpha^3|=|x-\alpha|(x^2+x\alpha+\alpha^2)\leq|x-\alpha|\left((1+|\alpha|)^2+|\alpha|(1+|\alpha|)+|\alpha|^2\right)$

$\leq(1+3|\alpha|+3|\alpha|^2)$.

$|x-\alpha|<\varepsilon$.

Scanned with CamScanner

(*) $|x|-|\alpha| \leq \underbrace{|x-\alpha| < \delta}_{|x-\alpha|<\delta=1} \Rightarrow |x| \leq 1+|\alpha|$

Επιλέγω $\delta_1 = \dfrac{\varepsilon}{1+3|\alpha|+3|\alpha|^2}$

Επιλέγω $\delta = \min(1, \delta_1)$

Απόδειξη: Δοθέντος του $\varepsilon>0$ επιλέγω $\delta = \min(1, \delta_1)$ και τότε για $|x-\alpha|<\delta$ έχουμε

$|x^3-\alpha^3| = |x-\alpha|\,|x^2+\alpha x+\alpha^2| \leq |x-\alpha|\left((1+|\alpha|)^2+|\alpha|(1+|\alpha|)+|\alpha|^2\right)$

$\boxed{\text{Πρόταση}}$: (Αρχή Μεταφοράς) Έστω α σ.σ. του $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ γ' $f: A \to \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$.

2) $\forall \{\alpha_n / n\in\mathbb{N}\} \subseteq A\setminus\{\alpha\}$ τ.ω $\lim \alpha_n = \alpha$ έχουμε $\lim f(\alpha_n) = \ell$.

Απόδειξη: "$(1\to 2)$". Επειδή $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$,

$\left.\begin{array}{l}\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0, \ 0<|x-\alpha|<\delta \\ x\in A\end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon.$

Έστω $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A-\{\alpha\}$ $\lim \alpha_n = \alpha$

$\exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $0<|\alpha_n-\alpha|<\delta \ \forall n\geq n_0 \Rightarrow |f(\alpha_n)-\ell|<\varepsilon \ \forall n\geq n_0$

$\Rightarrow \lim f(\alpha_n) = \ell.$

"$(2\to 1)$": Απαγωγή σε άτοπο.

Υποθέτω ότι δεν ισχύει η (i) $0<|x-\alpha|<\delta$. γ' $f(x)-\ell \geq \varepsilon$.

Οπότε $\exists \varepsilon>0 \ \forall \delta>0 \ \exists x\in A: \ 0<|x-\alpha|<\delta$.

Αν επιλέξω $\delta = 1/n$ τότε $\exists x_n\in A$ τ.ω. $0<|x_n-\alpha|<1/n \Rightarrow$

$\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$

Αντίφαση, αφού $|f(x_n)-\ell| \geq \varepsilon$.

Άλγεβρα Ορίων

Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$, α σ.σ. του A γ' $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell$ γ' $\lim_{x\to\alpha} g(x) = m$

(i) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\alpha} (\lambda f)(x) = \lambda \lim_{x\to\alpha} f(x)$.

(ii) $\lim_{x\to\alpha} (f+g)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x)$

(iii) $\lim_{x\to\alpha} (fg)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) \cdot \lim_{x\to\alpha} g(x)$

(iv) $\lim_{x\to\alpha} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x\to\alpha} f(x)}{\lim_{x\to\alpha} g(x)}$ Αν $\lim_{x\to\alpha} g(x) = m \neq 0$. τότε το $\frac{f}{g}$ ορίζεται σε κατάλληλη περιοχή

$\boxed{\text{Πρόταση}}$: Αν $f : A \to \mathbb{R}$, α. σ.σ. του A γ' $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell \neq 0$, τότε $\exists \delta > 0$ ώστε $\forall x \in A - \{\alpha\}$, $|x - \alpha| < \delta$, $f(x) \neq 0$.

Ειδικότερα:
- αν $\ell > 0 \rightsquigarrow f(x) > \ell/2$
- αν $\ell < 0 \rightsquigarrow f(x) < \ell/2$

Απόδειξη: Έστω $\ell > 0$ από τον ορισμό $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in (A \setminus \{\alpha\}) \cap (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$

$\Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - \ell < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow -\varepsilon + \ell < f(x) < \ell + \varepsilon$.

$\exists \delta > 0$ $\forall x \in (A \setminus \{\alpha\}) \cap (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$

για $\varepsilon = \ell/2 \rightsquigarrow f(x) > -\ell/2 + \ell = \ell/2$.

Ανάλυση Ι ① Πέμπτη 25/11/2021

Συνέχεια: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Ορισμός}}$: ορίου: α σ.σ. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ $\Big\}$ $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell$.

Όταν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \forall x : 0 < |x-\alpha| < \delta \\ x \in A \end{array}\right| \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

$\boxed{\text{Ορισμός}}$: Συνέχεια: Έστω $f : A \to \mathbb{R}$.

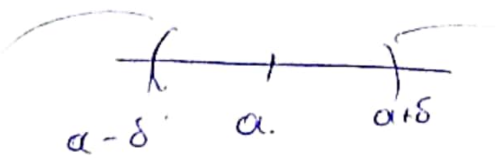
$\alpha \in A$. (εδώ παίζει το α)

Η f είναι συνεχής στο α, όταν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\alpha, \varepsilon) > 0$ ώστε

$$\forall x \left.\begin{array}{l} |x-\alpha| < \delta \\ x \in A \end{array}\right| \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$$

! Το α μπορεί να είναι μεμονωμένο σημείο του A.

Αν α μεμονωμένο $\exists \delta > 0$ ώστε $(\alpha-\delta, \alpha+\delta) \cap (A \setminus \{\alpha\}) = \emptyset$.



$\boxed{\text{Πρόταση}}$ (κριτήριο): Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $\alpha \in A$.

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η f είναι συνεχής στο α.

(ii) $\forall (a_n) \subseteq A$ τ.ω. $\lim a_n = \alpha$, έχουμε ότι $\lim f(a_n) = f(\alpha)$.

$\boxed{\text{Σημείωση}}$: Είχαμε αποδείξει: (στο προηγούμενο μάθημα):

$\boxed{\text{Πρόταση}}$: Έστω α σ.σ. του A, $f : A \to \mathbb{R}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell$.

(ii) $\forall (a_n) \subseteq A \setminus \{\alpha\}$, μ' $\lim a_n = \alpha$ έχουμε $\lim f(a_n) = \ell$.

Πχ: (Dirichlet): Η συνάρτηση $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

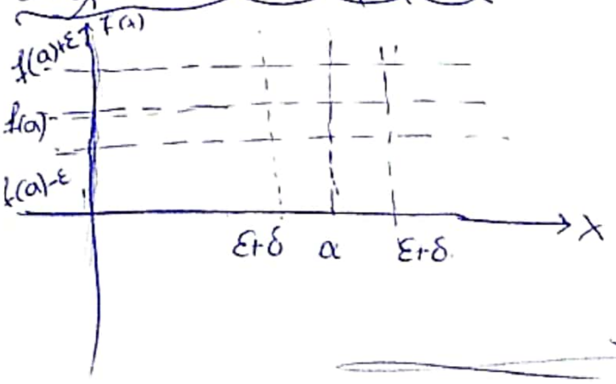
Η f δεν είναι συνεχής στα σημεία του $[0,1]$ (δηλ. πουθενά στο πεδίο ορισμού).

Μάλιστα, $\forall \alpha \in [0,1]$ $\nexists \lim_{x \to \alpha} f(x)$.

Συνέχεια στα α Γραφικά: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, ώστε $|x-\alpha| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon$

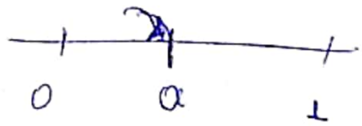
$$\Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - f(\alpha) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon + f(\alpha) < f(x) < \varepsilon + f(\alpha)$$



Πίσω στο πχ Dirichlet:

Έστω $\alpha \in [0,1]$. Τότε το α είναι σ.σ. του συνόλου.



Θέλω νδο. $\nexists$ όριο.

Έστω $(\alpha_n) \subseteq [0,1] \cap \mathbb{Q}$ (από πυκνότητα ρητών), $\lim \alpha_n = \alpha$. γ' τότε $f(\alpha_n) = 1, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim f(\alpha_n) = 1$.

$\exists (\beta_n) \subseteq [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, $\lim \beta_n = \alpha$ (πυκνότητα αρρήτων). Τότε όμως $f(\beta_n) = 0 \Rightarrow \lim f(\beta_n) = 0$.

Οπότε αφού οι 2 υπακολουθίες έχουν διαφορετικό όριο, $\nexists \lim_{x \to \alpha} f(x)$.

Συνέχεια: Αν α σ.σ. A, τότε f συνεχής στο α ανν $\exists \lim_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$

Άλγεβρα των συνεχών Συναρτήσεων

$f, g: A \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο α, $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε:

(i) λf είναι συνεχής στο α.

(ii) $f+g$ είναι συνεχής στο α

(iii) $f \cdot g$ είναι συνεχής στο α.

(iv) ... $g(\alpha) \neq 0$, τότε σε κατάλληλη περιοχή του A ορίζεται η $\frac{f}{g}$, η οποία είναι συνεχής στο α.

• Εαν $\lim a_n = a \Longrightarrow \left.\begin{array}{l}\lim f(a_n) = f(a) \\ \lim g(a_n) = g(a)\end{array}\right\} \lim\left(f(a_n)+g(a_n)\right) = f(a)+g(a)$. ②

V) Έστω $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$. $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ορίζεται $g\circ f: A \to \mathbb{R}$

Εαν η f είναι συνεχής στο $a \in A$ κ' η g είναι συνεχής στο $f(a)$

τότε $g\circ f$ είναι συνεχής στο a.

Πχ: Αν $\lim a_n = a$.

$(g\circ f)(a_n) = g\left(f(a_n)\right)$.

Όμως $\lim a_n = a$ κ' f είναι συνεχής στο a $\Longrightarrow \lim f(a_n) = f(a)$

f, g είναι συνεχής στο $f(a) \Longrightarrow \lim g\left(f(a_n)\right) = g\left(f(a)\right)$

Επιχείρημα για $f+g$ συνεχής στο A.

f συνεχής στο $a \sim \forall \varepsilon>0, \exists \delta_1>0: |x-a|<\delta_1 \Longrightarrow |f(x)-f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$

g συνεχής στο $a \sim \forall \varepsilon>0\ \exists \delta_2>0: |x-a|<\delta_2 \Longrightarrow |g(x)-g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Επιλέγω $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{\varepsilon}{2} + f(a) < f(x) < f(a) + \frac{\varepsilon}{2} \\ -\frac{\varepsilon}{2} + g(a) < g(x) < g(a) + \frac{\varepsilon}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\varepsilon + f(a) + g(a) < (f+g)(x) < f(a) + g(a) + \varepsilon \\ \Updownarrow \\ |(f+g)(x) - (f+g)(a)| < \varepsilon. \end{array}$$

~~Επ... δ=δn~~

~~Γεν...~~ Για πεπερασμένο πλήθος συνεχών συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{m} f_n(x)$ κάνω την παραπάνω διαδικασία, όμως επιλέγω $0<\delta = \inf\{\delta_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$

$\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots\} \subseteq (0, +\infty)$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta_n>0 : |x-\alpha|<\delta_n,\ |f_n(x)-f_n(\alpha)|<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \boxed{-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}+f_n(\alpha) \le f_n(x) \le f_n(\alpha)+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}}$$

$0<\delta=\inf\{\delta_n, n\in\mathbb{N}\}$ γ' $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ συγκλίνει

$$\Longrightarrow |x-\alpha|<\delta \Rightarrow -\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}+\sum_{n=1}^{m} f_n(\alpha)+\varepsilon\sum_{n=1}\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\Longrightarrow -\varepsilon+\sum_{n=1}^{m} f_n(\alpha)\le \sum_{n=1}^{m} f_n(x)\le \sum_{n=1}^{m} f_n(\alpha)+\varepsilon$$

$$\Longrightarrow -\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)\le \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\le \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)+\varepsilon$$

Φραγμένη Συνάρτηση:

f φραγμένη τότε $\exists\, m\le M$ ώστε $m\le f(x)\le M \Leftrightarrow |f(x)|\le \tilde{M}$

(απόλυτη φραξιμότητα)

Ιδιότητες Συνεχών Συναρτήσεων

Θεώρημα: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f φραγμένη

Απόδειξη: Έστω πως δεν αληθεύει, οπότε $\forall n$, $\exists x_n\in[\alpha,\beta]$ ώστε $|f(x_n)|>n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

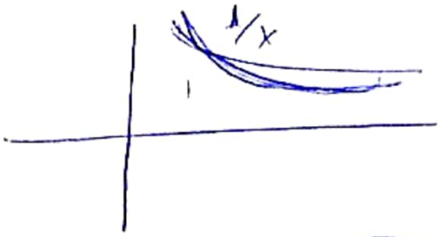
Τι κάνει η $\{x_n\}_n\subseteq[\alpha,\beta]$, οπότε είναι φραγμένη, από Bolzano-Weierstrass $\exists$ συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $x_{n_k}\to x_0$.

$\alpha\le x_{n_k}\le\beta \Rightarrow \alpha\le \lim_{n\to+\infty} x_{n_k}\le\beta \Longrightarrow |f(x_{n_k})|>n_k$

Επειδή f είναι συνεχής στο x_0, έχουμε $\lim f(x_{n_k})=f(x_0)$ Αντίφαση

$\downarrow +\infty$ $\quad$ $\downarrow \exists$

. Εάν είχα $f:(\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχή)



Αντιπαράδειγμα

Θεώρημα: Μέγιστης ή Ελάχιστης Τιμής.

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Αποδ: Το $A=\{f(x) \mid x\in[\alpha,\beta]\}$. Θα αποδ. ότι το $\sup A$ είναι η μέγιστη τιμή της f. και ότι $\forall \varepsilon>0$ $\sup A-\varepsilon$.

$\exists x\in[\alpha,\beta]$ $\quad \sup A-\varepsilon \quad \sup A$

$\sup A-\varepsilon < f(x) \leq \sup A$

$\sup A-\varepsilon<f(x)\leq \sup A.$

Επιλέγουμε $\varepsilon=\frac{1}{n}$, $\exists x_n\in[\alpha,\beta]$

$\sup A-\frac{1}{n}<f(x)\leq \sup A.$

Τότε $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\sup A.$

$x_n\in[\alpha,\beta] \xrightarrow{B-W} \exists\, x_{n_k}\to x_0\in[\alpha,\beta].$

Η f συνεχής στο $x_0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_{n_k})=f(x_0)$

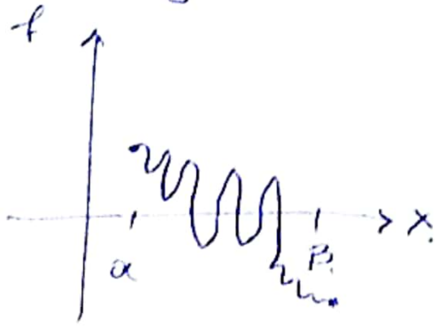
$$\| $$

$$\sup A.$$

Θεώρημα: Bolzano.

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής, ώστε $f(\alpha)f(\beta)<0$.

Τότε $\exists\, \xi\in(\alpha,\beta): f(\xi)=0$.



Απόδειξη: Έστω $f(\alpha)>0$.

Ορίζουμε το σύνολο $A=\{t\in[\alpha,\beta] \mid f(x)>0,\ \forall\, \alpha\le x\le t\}$

Το $A\neq\emptyset$, άνω φραγμένο., $\exists \sup A$.

Θα αποδείξουμε ότι $f(\sup A)=0$.

Έστω πως $f(\sup A)\neq 0$ — $f(\sup A)>0$ (i), $f(\sup A)<0$. (ii)

Θέτω $\xi=\sup A$.

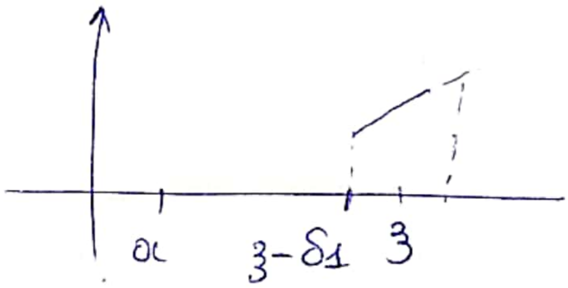
(i). Εάν $f(\xi)>0$., Επειδή η f είναι συνεχής στο ξ, $\forall \varepsilon>0$.

$\exists \delta>0 : |x-\xi|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(\xi)|<\varepsilon \Longrightarrow$

$-\varepsilon+f(\xi)<f(x)<\varepsilon+f(\xi)$, $\underline{f(\xi)>0}$

Επιλέγω $\varepsilon=\dfrac{f(\xi)}{2}$, $\delta_1>0 : |x-\xi|<\delta_1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 0<\dfrac{f(\xi)}{2}<f(x)$.



Στο διάστημα $[\alpha,\xi-\delta_n]\subseteq A$,

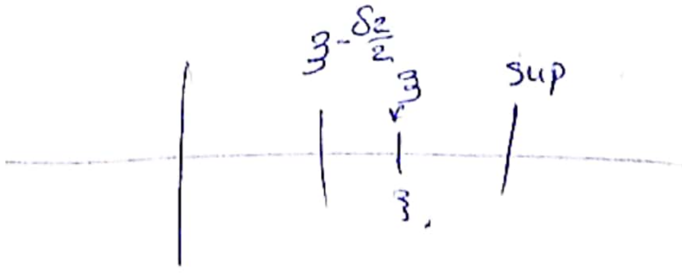
$$\left.\begin{array}{ll} f(x)>0 & [\alpha,\xi-\delta_1] \\ f(x)>0 & [\xi-\delta_1,\xi+\delta_1) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x)>0 \quad [\alpha,\xi+\delta_n].$$

Αντίφαση

$\sup A > \xi+\dfrac{\delta_1}{2}$

(ii) Εάν $f(\xi)<0$: $\exists\, \delta_2>0 : f(x)<0$, $\xi-\delta_2<x<\xi+\delta_2$

$\Longrightarrow$ $\underline{\text{Αντίφαση}}$



Scanned with CamScanner