Ανάλυση Ι

Πέμπτη 2/12/21

Είδαμε ότι:

Αν f συνεχής στο $[a,b]$ κ' $f(a)f(b)<0 \Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$ τ.ω $f(\xi)=0$

Θεώρημα: Bolzano

Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής (ΘΕΤ)

Έστω f συνεχής στο $[a,b]$. Εάν $f(a)<\xi<f(b)$ ή $f(b)<\xi<f(a)$, τότε $\exists x_0 \in (a,b)$ τ.ω. $f(x_0)=\xi$.

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτω ότι $f(a)<\xi<f(b)$

Ορίζω $g(x)=f(x)-\xi$. Η g είναι συνεχής διότι η f είναι συνεχής κ' ο ξ απλώς ένας αριθμός

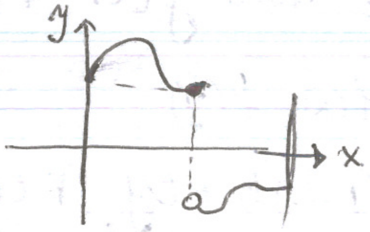
Έχω $g(a)=f(a)-\xi<0$ κ' $g(b)=f(b)-\xi>0$. Άρα $g(a)g(b)<0$

από Θ. Bolzano $\exists x_0 \in (a,b)$ τ.ω $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=\xi$.

//

Παρατηρήσεις:

(i) Η συνέχεια είναι υποχρεωτική



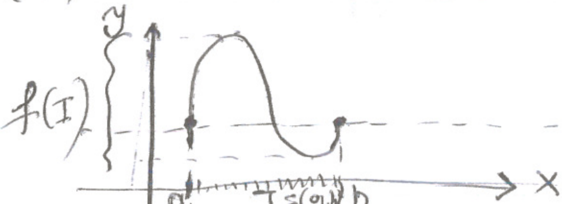
$\exists x_0$ τω $f(x_0)=\xi$.

(ii) Αν f συνεχής κ' I ένα διάστημα τότε $f(I)$ επίσης διάστημα

Απόδειξη: Έστω $x,y \in f(I)$ κ' χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $x<y$ κ' έστω z τ.ω $x<z<y$. Ν.δ.ο. $z \in f(I)$

Αφού $x \in f(I)$, $\exists a \in I$ τ.ω $f(a)=x$.
Αφού $y \in f(I)$, $\exists b \in I$ τω $f(b)=y$
} Από ΘΕΤ, $\exists x_0$ τω $f(x_0)=z$ $\Longrightarrow z \in f(I)$

(iii) Εάν $I=(a,b)$, εν γένει $f(I)$ δεν είναι το $(f(a),f(b))$, εκτός εάν η f είναι ↑



(iv) Αν I κλειστό κ' φραγμένο διάστημα (της μορφής $[a,b]$) κ' συνεχής, τότε $f(I)$ επίσης κλειστό κ' φραγμένο.

Απόδειξη: Από (iii) ~~το~~ $f(I)$ είναι διάστημα. Επειδή I κλειστό κ' φραγμένο έχει max κ' min. Δηλ $\exists\, x_m$ κ' x_M τ.ω $f(x_m) = \min f$ κ' $f(x_M) = \max f$. Άρα $f(I) = [f(x_m), f(x_M)]$.

(v) Αν I ανοιχτό, τότε $f(I)$ όχι κατανάγκη ανοιχτό!!!

(vi) Εαν f μονότονη κ' I ανοικτό, $f(I)$ επίσης ανοικτό.

Θεώρημα

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ κ' $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής κ' "1-1". Τότε η f γνησίως μονότονη.

Απόδειξη: Έστω $a, b \in I$ με $a < b$ δύο σημεία κ' έστω $f(a) < f(b)$.

Θδο f είναι γν. μονότονη.

Έστω $x, y \in I$ με $x < y$ τυχαία σημεία. ~~Έστω $f(a) < f(b)$~~

Θεωρώ $g: [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(t) = f((1-t)a + xt) - f((1-t)b + yt)$

$0 \le t \le 1$

$g(0) = f(a) - f(b)$ κ' $g(t) = f(x) - f(y)$

Έχω. ότι $\underbrace{(1-t)a + tx}_{x_t} < \underbrace{(1-t)b + ty}_{y_t}$, $\forall t \in [0,1]$.

Δηλ $x_t < y_t$. Άρα $g(t) = f(x_t) - f(y_t) \neq 0$, διότι f "1-1"

↳ Συνεπώς η $g(t)$ δεν αλλάζει πρόσημο. Επειδή $g(0) = f(a) - f(b) < 0$, άρα $g(1) = f(x) - f(y) < 0$. Δηλ $f(x) < f(y)$ κ' επειδή $x < y$ τυχαία η f γνήσια αύξουσα.

↳ Εαν η $g(t)$ άλλαζε πρόσημο θα είχα $g(t_1) > 0$, $g(t_2) < 0$, για $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in [0,1]$. Τότε όμως από ΘΕΤ θα υπήρχε τo ανάμεσα στα t_1, t_2 τ.ω $g(t_0) = 0$. Άτοπο.

Άσκηση (Μήτσου 4.2)

Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-περιοδική δηλ. $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Εάν το $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, δ.ο. f = σταθερή

Λύση: Έχω ότι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Άρα έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists M > 0$ τ.ω αν $x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Έστω $y \in \mathbb{R}$ τυχαίο.

$f(y) = f(y+T) = f(y+2T) = \dots = f(y+kT)$, $k = 1, 2, \dots$

Για κατάλληλα μεγάλο k, θα έχω $y + kT > M$.

Άρα $|f(y) - l| = |f(y+kT) - l| < \varepsilon$, διότι $y + kT > M$

Άρα $|f(y) - l| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, διότι ε τυχαίο

Έχω ότι $f(y)$ = αριθμός γ' $0 \le |f(y) - l| < \varepsilon \Rightarrow |f(y) - l| = 0$

$\Rightarrow f(y) = l$. για y τυχαίο.

$0 \le \alpha < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ $\Rightarrow \alpha = 0$

Άρα $f(x) = l$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση: (Πιθανό για τελικό)

Έστω $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 10$.

(α) Ν.δ.ο η f φραγμένη

Λύση: Επειδή $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 10$ $\exists M > 0$ τ.ω αν $x > M \Rightarrow |f(x) - 10| < \varepsilon$

Για $\varepsilon = 1$, $|f(x) - 10| < 1 \Rightarrow 9 < f(x) < 11$, για $x > M$

Άρα για $x \in [M, +\infty)$, $|f(x)| < 11$. φραγμένη.

Στο $[0, M]$;

Επειδή το $[0M]$ είναι κλειστό γ' φραγμένο, έχει μέγιστη τιμή, έστω k (επειδή συνεχής).

Συνεπώς $|f(x)| \le \max\{k, 11\}$, $\forall x \in [0, +\infty)$