



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 27 Ιανουαρίου 2022

Σ. Φίλιππας

ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι τμ. Β

1) Έστω συνάρτηση

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

και $x_0 = \frac{1}{2}$. Βρείτε $\delta = \delta(\varepsilon)$ τ.ω.

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

2) Έστω (a_n) , (b_n) δύο ακολουθίες τ.ω $1 < a_n < 2$ και $3 < b_n < 4$, $n = 1, 2, \dots$. Δείξτε ότι

$$(\limsup a_n)(\liminf b_n) \leq \limsup(a_n b_n).$$

3) Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0, 100] \rightarrow \mathbf{R}$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι είναι γνήσια θετικές δηλ. $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $\forall x \in [0, 100]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ω.

$$\varepsilon g(x) < f(x) < \frac{1}{\varepsilon} g(x), \quad \forall x \in [0, 100].$$

Ισχύει το αποτέλεσμα αν αντικαταστήσουμε το διάστημα $[0, 100]$ με το $[0, \infty)$;

4) Δίδονται οι σειρές με θετικούς όρους $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Αν ισχύει

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad n \geq n_0,$$

για κάποιο $n_0 \in \mathbf{N}$, δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει επίσης.

Οι απαντήσεις πρέπει να είναι πλήρως δικαιολογημένες.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια διαγωνίσματος: 1 ώρα και 15'.