Άσκηση 1: $\left|f(x)-f(\tfrac{1}{2})\right| = \left|x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{x}-2\right| = \left|x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1-2x}{x}\right| =$

$= \left|x-\tfrac{1}{2}-2\,\frac{x-\frac{1}{2}}{x}\right| = \left|x-\tfrac{1}{2}\right|\cdot\left|\frac{x-2}{x}\right|.$

Γιά νά εκτιμήσω τόν όρο $\left|\frac{x-2}{x}\right|$ υποθέτω καταρχήν ότι

(1) $\quad \left|x-\tfrac{1}{2}\right| < \tfrac{1}{4} \iff -\tfrac{1}{4} < x-\tfrac{1}{2} < \tfrac{1}{4} \Rightarrow \tfrac{1}{4} < x < \tfrac{3}{4} \Rightarrow \tfrac{1}{x} < 4$

καί $\quad |x-2| = 2-x < 2-\tfrac{1}{4} = 7/4$

Συνεπώς $\left|f(x)-f(\tfrac{1}{2})\right| = \left|x-\tfrac{1}{2}\right|\cdot\left|\frac{x-2}{2}\right| < \left|x-\tfrac{1}{2}\right|\cdot(7/4)\cdot 4 =$

$= \left|x-\tfrac{1}{2}\right|\cdot 7$

Ώστε άν $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$ έχω τό ζητούμενο. Επειδή έχω υποθέσει την (1) τελικά έχω: $\quad \delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{7}, \frac{1}{4}\right)$. □

Άσκηση 2: Γιά n = σταθερό καί $\ell \geq n$ έχω:

$$\inf_{k\geq n} b_k \leq b_\ell \Rightarrow (a_\ell)\cdot \inf_{k\geq n} b_k \leq (a_\ell) b_\ell \leq \sup_{k\geq n}(a_k b_k)$$

Συνεπώς $\quad a_\ell \leq \dfrac{\sup_{k\geq n}(a_k b_k)}{\inf_{k\geq n} b_k} \Rightarrow \sup_{k\geq n} a_k \leq \dfrac{\sup_{k\geq n}(a_k b_k)}{\inf_{k\geq n} b_k}$

(Διότι τό κλάσμα είναι ένα άνω φράγμα των a_ℓ, $\ell \geq n$)

Συνεπώς $\quad \sup_{k\geq n} a_k \cdot \inf_{k\geq n} b_k \leq \sup_{k\geq n}(a_k b_k)$.

Μέχρι στιγμής, το n = σταθ. Τώρα στέλνω τό $n \to +\infty$

και ποιέτω το ζητούμενο. □

Άσκηση 3: Η f/g είναι θετική συνεχής συνάρτηση, σε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Συνεπώς παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. δηλ. $m \le \frac{f(x)}{g(x)} \le M$ για $x \in [0,100]$.
Αν θέλω να έχω το ίδιο ε (αντί για m, M) μπορώ π.χ. να επιλέξω $\varepsilon = \min\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2M}\right)$, ώστε $\frac{1}{\varepsilon} = \max\left(\frac{2}{m}, 2M\right)$.
Όταν $x \in (0,\infty)$, το αποτέλεσμα δεν ισχύει π.χ.
$f(x) = 1/x^2$, $g(x) = 1/x$. Τότε $\frac{f}{g} = \frac{1}{x}$ και $\nexists\ \varepsilon > 0$ τ.ω. $\frac{1}{x} > \varepsilon$ καθώς $x \to +\infty$. □

Άσκηση 4: Επειδή όλοι οι όροι είναι θετικοί από τη σχέση που δίνεται έχω ότι

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \ge \frac{a_n}{b_n} \ge \cdots \ge \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} = k > 0$$

Συνεπώς για $n \ge n_0$, έχω ότι $a_n \ge k\, b_n$.
Από κριτήριο σύγκρισης, αν η $\sum a_n$ συγκλίνει τότε συγκλίνει και η $\sum b_n$. □

Παρατήρηση: Δεν ισχύει το αντίστροφο του κριτηρίου του λόγου. π.χ. η $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει αλλά η

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \longrightarrow 1$$

και όχι σε κάτι < 1.