ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 14 Απριλίου 2022

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ – Ασθενείς λύσεις

Φυλλάδιο 4

1) Έστω $U \subset \mathbf{R}^n$, φραγμένο, ομαλό και συνεκτικό . Η συνάρτηση $u \in H^1(U)$ είναι ασθενής λύση για το πρόβλημα Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & x \in U, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, & x \in \partial U, \end{cases} \tag{1}$$

εφόσον

$$\int_U Du \cdot Dv \; dx = \int_U fv \; dx, \qquad \forall v \in H^1(U).$$

(**i**) Έστω $V = \{v \in H^1(U) : \int_U v dx = 0\}$. Δείξτε οτι ο V με το εσωτερικό γινόμενο του $H^1(U)$ είναι χώρος Hilbert.

(**ii**) Δείξτε οτι η (1) έχει μοναδική ασθενή λύση στον V αν και μόνον εαν

$$\int_U f dx = 0.$$

(**iii**) Τι μπορούμε να πούμε για την λύση της (1) στον $H^1(U)$;

2) Έστω $U \subset \mathbf{R}^n$ φραγμένο, ομαλό και συνεκτικό. Δείξτε οτι υπάρχει $C = C(U) > 0$ τ.ω.

$$\int_U u^2 dx \leq C \left(\int_U |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial U} u^2 dS_x \right), \qquad \forall \; u \in H^1(U).$$

Υποδ. Έστω $u \in C^\infty(\bar{U})$. Ξεκινήστε απο τη σχέση

$$\int_U u^2 dx = \int_U u^2 \frac{d}{dx_n}(x_n) dx = ...$$

και συνεχίστε με ολοκλήρωση κατά μέρη.

3) Έστω U ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ με ομαλό σύνορο. Έστω επίσης $E \subset U$ μετρήσιμο σύνολο τ.ω.:

$$0 < |E| < |U|.$$

Δείξτε οτι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει σταθερά $C_\varepsilon > 0$ τ.ω.

$$\frac{1}{|U|}\int_U u^2 dx \leq (1+\varepsilon)\,\frac{1}{|E|}\int_E u^2 dx + C_\varepsilon \int_U |\nabla u|^2 dx, \qquad \forall\, u \in H^1(U).$$

Υποδ. Εργαστείτε με εις άτοπο απαγωγή, όπως στην απόδειξη της ανισότητας Poincare (βλ. Evans) στην τάξη.

4). (Ανισότητα Morrey στη μία διάσταση). Αν $1 < p < \infty$ και $u \in C_c^1(\mathbf{R})$ δείξτε οτι

$$[u]_{C^{0,1-\frac{1}{p}}(\mathbf{R})} = \sup_{\substack{x\neq y\\ x,y\in\mathbf{R}}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{1}{p}}} \leq \|u'\|_{L^p(\mathbf{R})}.$$

5). Έστω $n \geq 2$ και $1 \leq p < n$. Σκοπός της άσκησης είναι να δείξουμε την ανισότητα ίχνους με τον καλύτερο (δηλ. μεγαλύτερο) εκθέτη q. Πιο συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε την

$$\left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} |u(x',0)|^q dx'\right)^{\frac{1}{q}} \leq C(n,p)\left(\int_{\mathbf{R}^n} |Du(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall u \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)\ , \tag{2}$$

όπου $x = (x', x_n)$, $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$.

(α) Αν γνωρίζετε οτι η παραπάνω ανισότητα ισχύει, χρησιμοποιώντας κατάλληλο επιχείρημα κλίμακας (scaling argument) όπως στην τάξη, βρείτε το q.

(β) Αποδείξτε την ανισότητα για $p = 1$ και για την τιμή του q που βρήκατε στο ερώτημα (α).

Υποδ. Μπορείτε να ξεκινήσετε απο την σχέση

$$u(x',0) = \int_{-\infty}^{0} u_{x_n}(x',t)dt\ .$$

(γ) Αποδείξτε την (1) για γενικό $p \in [1,n)$.

(δ) Γράψτε την αντίστοιχη ανισότητα ίχνους για γενικό φραγμένο χωρίο U με ομαλό σύνορο.

(ε) Πώς θα εργαζόσασταν για να αποδείξετε την ανισότητα στην (δ);

6) Έστω $U \subset \mathbf{R}^2$, το χωρίο

$$U = \{(x,y):\ 0 < x < 1, \quad 0 < y < x^a\},$$

και $u : U \to \mathbf{R}$ η συνάρτηση

$$u(x,y) = x^{1-b}, \qquad 1 < b < \frac{1+a}{2}.$$

Δείξτε ότι η u ανήκει στον $H^1(U)$ αλλά δεν μπορεί να επεκταθεί σε συνάρτηση που να ανήκει στον $H^1(\mathbf{R}^2)$. Τι συμπεραίνουμε απο την ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης;