



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 27 Οκτωβρίου 2022

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 2

1). Έστω $\{u_n\}$ μία άξουσα ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων στο χωρίο Ω και υποθέτουμε ότι σε κάποιο σημείο $x_0 \in \Omega$ η ακολουθία $\{u_n(x_0)\}$ είναι φραγμένη. Δείξτε ότι η ακολουθία συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω σε μία αρμονική συνάρτηση.

2). Έστω u η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0, & \text{in } \mathbf{R}_+^n \\ u &= g & \text{on } \partial\mathbf{R}_+^n,\end{aligned}$$

όπου η g είναι μία φραγμένη συνάρτηση με $g(x) = |x|$ για $x \in \partial\mathbf{R}^n$, $|x| \leq 1$. Εκτιμώντας το όριο

$$\frac{u(h e_n) - u(0)}{h}, \quad 0 < h \rightarrow 0,$$

δείξτε ότι η Du δεν είναι φραγμένη κοντά στο $x = 0$.

3). Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Poisson για την μπάλα και την ιδιότητα της μέσης τιμής για αρμονικές συναρτήσεις στη μπάλα $B(0, r)$, δείξτε ότι αν $u(x)$ είναι θετική αρμονική συνάρτηση στη μπάλα $B(0, r)$ και συνεχής στην $\overline{B(0, r)}$, τότε

(α)

$$r^{n-2} \frac{r - |x|}{(r + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq r^{n-2} \frac{r + |x|}{(r - |x|)^{n-1}} u(0), \quad x \in B(0, r).$$

(β) Αν $V \subset\subset B(0, r)$, βρείτε θετική σταθερά $C = C(V)$ τ.ω.

$$\sup_V u(x) \leq C \inf_V u(x).$$

4). Όπως έχουμε πεί, η $v \in C^2(\bar{U})$ λέγεται υφαρμονική εαν

$$-\Delta v \leq 0, \quad \text{in } U.$$

(α) Αν $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ομαλή και κυρτή και u αρμονική, τότε $v = \phi(u)$ υφαρμονική.

(β) Αν u αρμονική τότε $v = |Du|^2$ υφαρμονική.

5). Έστω $x = (x', x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$,

$$B_1^+ = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1, \quad x_n > 0\},$$

και συνάρτηση $u \in C^2(\overline{B_1^+})$ τ.ω.

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x_n \geq 0 \\ -u(x', -x_n) & x_n < 0. \end{cases}$$

(α) Αν u αρμονική δείξτε ότι και v είναι αρμονική στην $B_1 = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$

(β) Αν μόνο $u \in C^2(B_1^+) \cap C^0(\overline{B_1^+})$ και αρμονική στην B_1^+ τότε η v πάλι είναι αρμονική στην B_1 .

6). Αν $u \in C^2(\mathbf{R}_+^n) \cap C^0(\overline{\mathbf{R}_+^n})$ είναι αρμονική, φραγμένη και τ.ω.

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = 0, \quad \forall x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1},$$

δείξτε ότι

$$u(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbf{R}_+^n.$$

7). Έστω $v \in C^0(\Omega)$ υφαρμονική συνάρτηση στο χωρίο Ω και $w = H_{B_0}[v]$ η αρμονική ανύψωση της v στην μπαλα $B_0 \subset \Omega$. Δείξτε ότι η $w = H_{B_0}[v]$ είναι C^0 υφαρμονική.

Παράδοση: Πέμπτη 3 Νοεμβρίου