



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τρίτη 15 Νοεμβρίου 2022

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 3

1). Έστω $U \subset \mathbf{R}^n$ φραγμένο ανοικτό σύνολο και $u \in C(\bar{U})$ ικανοποιεί

$$\sup_{\bar{U}}(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial U}(u + \varepsilon e^{\gamma x_1}),$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι

$$\sup_{\bar{U}} u = \sup_{\partial U} u.$$

2). Η u είναι αρμονική στην ‘τρύπια’ μπάλα με ακτίνα $\frac{3}{2}$, $B(0, \frac{3}{2}) \setminus \{0\} \subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. Έστω ότι γνωρίζουμε ότι καθώς $x \rightarrow 0$ έχουμε ότι $u(x) = o(|\ln|x||)$ όταν $n = 2$ ή $u(x) = o(|x|^{2-n})$ αν $n \geq 3$. Θα δείξουμε ότι η u είναι φραγμένη. Έστω $n \geq 3$.

(α) Με χρήση αρχής μεγίστου δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τ.ω.

$$u(x) \leq C + \varepsilon |x|^{2-n}, \quad r < |x| < 1, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall r \in (0, 1).$$

(β) Η u είναι φραγμένη στην $B(0, 1) \setminus \{0\}$.

(γ) Δείξτε ότι μπορούμε να ορίσουμε την u στο μηδέν με τρόπο ώστε να είναι αρμονική σε όλη την $B(0, 1)$.

Υπόδ. Έστω v η αρμονική συνάρτηση στην $B(0, 1)$ που ικανοποιεί $v(x) = u(x)$ όταν $|x| = 1$. Θέτουμε $w := u - v$. Με χρήση αρχής μεγίστου δείξτε ότι $w = 0$ στην $B(0, 1) \setminus \{0\}$.

Εργαστείτε παρόμοια για $n = 2$.

3) Έστω η αρμονική συνάρτηση $u(x) = xy$ ορισμένη στη μοναδιαία μπάλα $B(0, 1)$. Βρείτε τα ακρότατά της u στην $\bar{B}(0, 1)$ και υπολογίστε στα σημεία αυτά την $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, όπου ν το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα. Στη συνέχεια επιβεβαιώστε το Λήμμα του Hopf.

4) Έστω $U \subset \mathbf{R}^n$ φραγμένο ανοικτό σύνολο και

$$Lu = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}, \quad x \in U,$$

ελλειπτικός τελεστής. Αν $h \in C^1(\mathbf{R})$ με $h' \geq 0$, τότε δείξτε ότι το πρόβλημα

$$\begin{aligned} Lu + h(u) &= f, & x \in U \\ u &= g, & x \in \partial U, \end{aligned}$$

όπου f, g ομαλές συναρτήσεις, έχει το πολύ μία λύση $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$.

5). Έστω $u \in C^2(\mathbf{R}^n)$ κλασική λύση της

$$\Delta u - u = f(x), \quad |u| < 1, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Σκοπός της άσκησης είναι να δείξουμε ότι αν

$$|f(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}|x|}, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

τότε για κατάλληλη σταθερά $C > 0$,

$$|u(x)| \leq C e^{-\frac{1}{2}|x|}, \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (1)$$

(α) Με κατάλληλη χρήση αρχής μεγίστου δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C_1 > 0$ τ.ω. για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ υπάρχει $R_\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα

$$u(x) \leq C_1 e^{-\frac{1}{2}|x|} + \varepsilon e^{\frac{1}{2}|x|}, \quad 1 < |x| < R, \quad \forall R \geq R_\varepsilon.$$

(β) Δείξτε την (1).

6). Έστω $U \subset \mathbf{R}^n$ φραγμένο ανοικτό σύνολο με C^2 σύνορο. Με χρήση του Λήμματος Hopf δείξτε οποιεσδήποτε δύο λύσεις του προβλήματος

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, & x \in U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g, & x \in \partial U, \end{aligned}$$

διαφέρουν κατά μία σταθερά.