



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πέμπτη 1 Δεκεμβρίου 2022

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 4

1). Η $u(x, t)$ είναι φραγμένη λύση του προβλήματος Cauchy της εξίσωσης θερμότητας

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx}, & x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \\u(x, 0) &= \phi(x),\end{aligned}$$

όπου $\eta \phi \in C(\mathbf{R})$ ικανοποιεί

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = b.$$

Για $x \in \mathbf{R}$ υπολογίστε το όριο

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t).$$

2). Δίδεται το πρόβλημα συνοριακών αρχικών τιμών (ΠΣΑΤ)

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= 0, & x \in \mathbf{R}_+, \quad t > 0, \\u &= 0, & x \in \mathbf{R}_+, \quad t = 0, \\u &= g & x = 0, \quad t > 0,\end{aligned}$$

όπου $\eta g \in C^1[0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ με $g(0) = 0$. Δείξτε (όχι με επαλήθευση) ότι η λύση του παραπάνω προβλήματος δίδεται από

$$u(x, t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}} g(s) ds.$$

Υποδ. Έστω $v(x, t) := u(x, t) - g(t)$ και επεκτείνετε την v ώστε να ορίζεται και στα αρνητικά x : $v(-x, t) = -v(x, t)$. Στη συνέχεια θεωρήστε το πρόβλημα Cauchy.

3) Εστω η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης θερμότητας

$$\Phi(x - y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Αν $g \in L^\infty(\mathbf{R})$ συνάρτηση τ.ω. τα πλευρικά όρια $g(x_0^+)$ και $g(x_0^-)$ υπάρχουν, δείξτε ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} \Phi(y - x_0, t) g(y) dy = \frac{1}{2} (g(x_0^+) + g(x_0^-)).$$

4). Έστω (όπως στον Evans)

$$E(x, t; r) := \{(y, s) \in \mathbf{R}^{n+1} : s \leq t, \Phi(x - y, t - s) \geq r^{-n}\}.$$

Δείξτε ότι

$$\frac{1}{r^n} \int \int_{E(x, t; r)} \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds = \int \int_{E(0, 0; 1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = 4.$$

5). Δίδεται η εξίσωση

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) &= 2, & 0 < x < 1, & t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned}$$

Έστω $\psi(x)$ η λύση του στάσιμου προβλήματος δηλ.

$$-\psi_{xx} = 2, \quad \psi(0) = \psi(1) = 0.$$

(α) Βρείτε σταθερά $\beta > 0$ τ.ω.

$$(1 - e^{-\beta t})\psi(x) \leq u(x, t) \leq \psi(x), \quad t > 0,$$

(β) Συμπεράνετε ότι καθώς $t \rightarrow +\infty$ η $u(x, t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\psi(x)$.

6). Έστω το μή γραμμικό ΠΣΑΤ

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + g(t, x, u)u_x &= F(t, x), & 0 < x < L, & t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 < x < L, \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0, & t > 0, \end{aligned}$$

όπου g , F και f ομαλές συναρτήσεις.

(α) Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση ικανοποιεί αρχή μεγίστου. Συγκεκριμένα αποδείξτε ότι αν

$$u_t - u_{xx} + g(t, x, u)u_x \leq 0, \quad (x, t) \in U_T,$$

τότε

$$\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u,$$

όπου $U_T = (0, L) \times (0, T]$, και Γ_T το παραβολικό σύνορο.

(β) Αν $M = \max_{0 \leq x \leq L} |f(x)|$, $N = \max_{\bar{U}_T} |F(x, t)|$ και u κλασική λύση δείξτε ότι

$$|u(x, t)| \leq M + NT, \quad (x, t) \in U_T.$$

7). (Παραβολικό Λήμμα Hopf, απλή περίπτωση) Έστω $U = (0, 1)$, $U_T = U \times (0, T]$ και $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C^1(\bar{U}_T)$ ικανοποιεί την

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad x \in U_T.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $t_0 \in (0, T]$ και $m \in \mathbf{R}$ τ.ω. $u(0, t_0) = m$ και

$$u(x, t) > m, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t < t_0,$$

(α) Βρείτε συνάρτηση $w(x, t)$ τ.ω. $w(0, t_0) = 0$, $w_x(0, t_0) > 0$ και σε μία γειτονιά R του $(0, t_0)$ να ικανοποιεί

$$w(x, t) \leq u(x, t) - m,$$

Υποδ. Έστω $R = (0, \frac{1}{2}) \times (\frac{t_0}{2}, t_0)$. Για την εύρεση της w χρησιμοποιήστε κατάλληλα τη συνάρτηση $z(x, t) = e^x - 1$.

(β) Δείξτε ότι

$$u_x(0, t_0) > 0.$$

Παράδοση: Τρίτη 20 Δεκεμβρίου