



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τρίτη 20 Δεκεμβρίου 2022

Σ. Φίλιππας

ΜΔΕ (μεταπτυχιακό)

Φυλλάδιο 5

1). Έστω ότι η $u \in C^2(\mathbf{R} \times [0, \infty))$ λύνει την κυματική εξίσωση στη μία διάσταση.

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, & x \in \mathbf{R}, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= g(x), & u_t(x, 0) &= h(x), \end{aligned}$$

όπου g και h έχουν συμπαγή φορέα. Δείξτε ότι από ένα χρόνο T και μετά ισχύει

$$\int_{\mathbf{R}} u_t^2 dx = \int_{\mathbf{R}} u_x^2 dx, \quad t \geq T.$$

2). Έστω $f \in C^3(\mathbf{R}^3)$, και

$$u(x, t) = \int_{S(x, t)} \frac{f(y)}{t} dS_y, \quad I(x, t) = \int_{B(x, t)} \Delta f(y) dy,$$

όπου $B(x, t)$ η μπάλα κέντρου x και ακτίνας t και $S(x, t) = \partial B(x, t)$ η αντίστοιχη σφαίρα.

(α) Δείξτε ότι

$$u_t = \frac{u + I}{t}.$$

(β) Δείξτε ότι

$$u_{tt} = \Delta u, \quad x \in \mathbf{R}^3, \quad t > 0.$$

(γ) Τι αρχικές συνθήκες ικανοποιεί η u ;

3) Έστω u ομαλή λύση της εξίσωσης

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0, & x \in \mathbf{R}^2, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, & u_t(x, 0) &= h(x), \quad x \in \mathbf{R}^2, \end{aligned}$$

όπου h είναι ομαλή συνάρτηση τ.ω. $h(x) = 0$ για $|x| > N$ όπου N θετικός αριθμός. Δείξτε ότι υπάρχει θετική σταθερά C τ.ω.

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{t}, \quad \text{για } t > 2(|x| + N).$$

Βρείτε μια τέτοια σταθερά C .

4). Εστω η εξίσωση,

$$u_{tt} + u_t - u_{xx} + u = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0.$$

Δίδεται ότι τα αρχικά δεδομένα είναι τέτοια ώστε η λύση να έχει συμπαγή φορέα (στον $\mathbf{R}$). Ορίζουμε την ενέργεια

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}} (u_t^2 + u_x^2 + u^2) dx.$$

(α) Αν $v = e^{\frac{t}{2}}u$, βρείτε κατάλληλη ‘ενέργεια’ της v που διατηρείται.

(β) Δείξτε ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0$.

5). Λύστε με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών

(α) $x_1 u_{x_1} + 2x_2 u_{x_2} + u_{x_3} = 3u$, $u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2)$.

(β) $u_t + u_x^2 = t$, $t > 0$, $u(x, 0) = x$.

(γ) $u u_{x_1} + u_{x_2} = 1$, $u(x_1, x_1) = \frac{1}{2}x_1$.

Παράδοση: Δευτέρα 16 Ιανουαρίου