



Πέμπτη 2 Μαρτίου 2023

Σ. Φίλιππας

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (τμ. Α)

Φυλλάδιο 4

1). Δίδονται οι συναρτήσεις $y_1 = x^3$, $y_2 = |x|^3$ στο διάστημα $[-1, 1]$.

(i) Δείξτε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

(ii) Δείξτε ότι η Βρονσκιανή $W(x) = 0$, $\forall x \in [-1, 1]$.

(iii) Παρατηρήστε ότι οι y_1 και y_2 είναι λύσεις της εξίσωσης

$$y'' - \frac{2}{x}y' = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

Υπάρχει αντίφαση με το Θεώρημα 4.5 (σελ. 34) των σημειώσεων Τερσένοβ;

2). Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$(2 - x)y''' + (2x - 3)y'' - xy' + y = 0, \quad x < 2,$$

αφού παρατηρήσετε ότι η $y_1 = e^x$ είναι λύση.

Υποδ. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο υποβιβασμού της τάξεως.

3). Οι συναρτήσεις $p_1(x)$ και $p_2(x)$ είναι συνεχείς σε όλο το \mathbf{R} . Δείξτε ότι η συνάρτηση $\phi(x) = e^{x^2} - 1$ δεν μπορεί να είναι λύση της Δ.Ε.

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0.$$

4). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = 3, \quad x \in \mathbf{R},$$

Υποδ. Χρησιμοποιήστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Παράδοση: Τετάρτη 8 Μαρτίου 2023